ΦR. 3596. a.

Matheſis. Statica & mechanica corpor. ſolidor.
489.

4° Math. A. 122.

R

# P. S. Girards
# Analytiſche Abhandlung
von dem
# Widerſtande feſter Körper,
und von den
## feſten Körpern von überall gleichem Widerſtande.

---

Nebſt
einer Menge Verſuche über die Stärke und ſpecifiſche Elaſticität des Eichen- und Fichtenholzes.

---

Aus dem Franzöſiſchen überſetzt
von
C. Kröncke,
Fürſtlich Heſſiſchem Steuerrathe und Ober-Rheinbau-Inſpector.

---

Mit Kupfern.

---

Gieſen,
bei Taſché und Müller
1803.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Vorrede.

Vielen Künſtlern, vorzüglich aber dem rationellen Baumeiſter muß eine vollſtändige Theorie des Widerſtandes feſter Körper von großer Wichtigkeit ſeyn. Mir iſt kein Werk, außer demjenigen, wovon ich dem Publikum hiermit eine deutſche Ueberſetzung übergebe, bekannt, welches eine ſolche Theorie mit einiger Vollſtändigkeit enthält, und ſo glaube ich denn, durch dieſe Ueberſetzung keine ganz unverdienſtliche Arbeit übernommen zu haben.

Anfangs war ich Willens, dieſe Theorie in einzelnen Noten auf die wichtigſten Bauvorfälle anzuwenden, woran ich aber durch eine, während ich mit dieſer Arbeit beſchäftigt war, erfolgte Dienſtveränderung verhindert wurde. Wenn auch eine ſolche Anwendung für manchen nicht ganz überflüſſig ſeyn möchte; ſo iſt es doch vielleicht gut, daß ſie nicht in ſo vielen einzelnen Noten erſcheint, worin doch nichts vollſtändiges hätte geliefert können. Vielleicht kommt ſie in der Folge mit mehrern andern Sachen in einer ganz andern Form, als Fortſetzung dieſer Abhandlung, oder auch, wenn man will, als ein ſelbſtſtändiges Werk heraus.

Ich denke mir die Sache ſo: Die Baukunſt kann füglich in drey ganz verſchiedenen Hinſichten betrachtet und behandelt werden. Nähmlich, erſtens in äſthetiſcher, zweytens in ökonomiſcher, und drittens in mathematiſcher, vorzüglich mechaniſcher Hinſicht.

Ein jeder dieſer Theile der Baukunſt iſt ſo weitläufig, und mit ſo vielen Schwierigkeiten verknüpft, daß einem Manne es ſchwer fallen möchte, ſie alle drey gleich gut und vollſtändig zu bearbeiten. Wirklich iſt mir auch kein Werk über die Baukunſt bekannt, das in jeder dieſer drey Hinſichten gleiche Genüge leiſtet. Es bleibt alſo nichts übrig, als das, welches eigentlich ein Ganzes ausmachen ſollte, für's erſte zu trennen. Iſt dieſes geſchehen, ſo läßt ſich mit der Zeit etwas Vollſtändigeres erwarten. Die ſchöne Baukunſt wurde deshalb ſchon lange von den übrigen Theilen dieſer Kunſt getrennt, und beſonders bearbeitet, und gewiß nicht zum Nachtheile derſelben. So meine ich nun, müßte es nicht minder vortheilhaft ſeyn, wenn auch der mathematiſche Theil einmal getrennt, und beſonders abgehandelt würde. Zumahl da dieſer Theil in den eigentlichen Werken über die Baukunſt am wenigſten, und einzelne Unterabtheilungen deſſelben nur in großen und koſtbaren Werken und einzelnen Abhandlungen cultivirt wurden.

Ich wünſche, daß ein Mann, der dieſer nicht leichten Arbeit ganz gewachſen iſt, dieſelbe übernehmen möchte, und deshalb mache ich hier darauf aufmerkſam. Nur in dem Falle, wenn ſich niemand dazu verſtehen ſollte, werde ich vielleicht, wenn mir Muße dazu entſteht, meine Kräfte daran wagen, in der Hoffnung, daß, wenn auch meine Arbeit nicht die größte Vollkommenheit erreichen ſollte, ſie dennoch nicht ganz ohne Nutzen ſeyn würde.

Darmſtadt, den 1ſten December 1802.

Kröncke.

# Einleitung.

Wenn es gleich erlaubt iſt, in der Theorie der Statik den Hebel, vermittelſt welchen die Kräfte gegenſeitig auf einander wirken, als vollkommen unbiegſam anzunehmen; ſo kann doch dieſe Vorausſetzung nicht mehr gelten, wenn dieſe Wiſſenſchaft auf die Berechnung der Maſchinen angewandt werden ſoll, weil in der Natur keine Subſtanz zu finden iſt, deren Theile nicht durch die Wirkung irgend einer Kraft ſollte getrennt werden können.

Es ſind alſo zweyerley Arten des Gleichgewichtes in Betracht zu ziehen, nähmlich das des Hebels, und das der hierauf Bezug habenden Maſchinen. Die eine Art des Gleichgewichts beſteht unter den entgegengeſetzten Kräften, welche ſich aufheben, und die andern unter einer gewiſſen Function dieſer Kräfte und der Cohäſion der Theile, woraus die Maſchine zuſammengeſetzt iſt. Die Bedingungen der erſtern Art laſſen ſich genau angeben; die Bedingungen der zweyten laſſen ſich aber nur näherungsweiſe beſtimmen.

Um die Bedingungen dieſes letztern Gleichgewichts anzugeben, müßte die Figur und Lage der Elementartheilchen der Körper bekannt ſeyn, wovon die Kraft abhängt, mit der ſie der Trennung widerſtehen; da aber dieſe Kenntniß nicht zu erlangen iſt: ſo muß man, um den Widerſtand der feſten Körper dem Calcul zu unterwerfen, zu verſchiedenen Hypotheſen ſeine Zuflucht nehmen, unter denen diejenige die beſte iſt, deren Reſultate ſich denen am meiſten nähern, welche man durch die Erfahrung erhält.

Galilei, welcher im 17ten Jahrhundert den Grund zu der neuern Phyſik legte, war der erſte, der es verſuchte, auf den Widerſtand der feſten Körper die Geſetze der Mechanik anzuwenden, und obgleich die Suppoſition, welche er machte, keinesweges für alle Körper gültig iſt; ſo gebührt ihm doch der Ruhm, der Wißbegierde der Geometer eine Bahn eröffnet, und dieſe auch zuerſt ſelbſt betreten zu haben.

Bey ſeiner Viſitation des Arſenals von Venedig beobachtete er in verſchiedenen Werkſtätten die Maſchinen, welche für ihn verfertigt wurden, und hierdurch wurde er veranlaßt, über den Widerſtand der feſten Körper nachzudenken. Die Frucht dieſes Nachdenkens theilte er der Welt 1638 in ſeinen Geſprächen mit, welches Werk allein den Ruhm ſeines Verfaſſers verewigen würde, wenn es auch blos die Abhandlung über die beſchleunigende Geſchwindigkeit und über die Bahn der geworfenen Körper enthielte.

Galilei nahm an, die feſten Körper beſtehen aus kleinen, unter einander parallelen Fibern. Er unterſuchte zuerſt den Widerſtand, welchen ſie einer Kraft entgegen ſetzen, die ſie parallel mit ihrer Länge zu verlängern trachtet, und fand bald, daß er der Anzahl der Fibern proportional iſt. In der Folge nahm er an, die Kraft wirke perpendikulär auf ihre Länge, wie ein an dem Ende eines horizontal befeſtigten Balkens angebrachtes Gewicht, und bewies, daß in dieſer neuen Lage der Widerſtand der Fibern proportional iſt, der Summe derſelben multiplicirt durch einen Hebelarm, welcher beſtändig ein beſtimmter Theil der vertikalen Dimenſion des feſten Körpers in ſeiner Brechungsebene iſt. Alle Hypotheſen, die man über dieſe Eigenſchaft der Körper aufſtellen kann, kommen in dieſem Punkt überein. Der beſtimmte Charakter der Galileiſchen Hypotheſe beſteht einzig darin, daß er den Widerſtand einer jeden einzelnen Fiber als unabhängig von der Größe der Ausdehnung im Augenblick des Bruches annahm.

Durch die Reſultate ſeines Raiſonnements, und durch ſein beobachtendes Genie erklärte er einige Naturerſcheinungen, wovon die alten Philoſophen keine Gründe anzugeben verſucht hatten. Er bemerkte z. B., daß die Cétacées, die größten Geſchöpfe im Thierreiche, in einer Flüſſigkeit leben, die einen beträchtlichen Theil ihres Gewichtes unterſtützt, weil ſo große Geſchöpfe ſonſt unfehlbar unter ihrem eigenen Gewichte erliegen müßten, und in einer minder dichten Flüſſigkeit ſich ohne Gefahr nicht würden bewegen können. Aus einem entgegengeſetzten Grunde bemerkte er, daß die Inſekten unbeſchädigt von einer ſehr großen Höhe herunter fallen können. Da er endlich den Widerſtand eines vollen mit dem eines hohlen Cylinders von gleicher Maſſe verglich; ſo war er der erſte, welcher bemerkte, daß die Natur dadurch, daß ſie die Knochen der Thiere und die Stengel gewiſſer Pflanzen hohl bildete, zweyerley Zwecke zugleich erreichte, dieſe nähmlich, bey der größten Leichtigkeit einer beſtimmten Gewalt widerſtehen zu können.

Die Theorie der feſten Körper von überall gleichem Widerſtande, wovon er der Erfinder iſt, giebt den nützlichen Zweck an, worauf er ſein Augenmerk richtete, und iſt zugleich ein auffallender Beweis von ſeinem tief eindringenden Verſtande.

Dieſe Theorie iſt durch die Anwendung, welcher ſie fähig iſt, von ſo großer Wichtigkeit, daß wir es für nöthig halten, die Ideen, welche früh oder ſpät dahin führen mußten, mit einiger Ausführlichkeit zu entwickeln.

Das Gewicht, womit ein feſter Körper perpendikulär mit ſeiner Länge belaſtet iſt, äußert ſeine Wirkung nicht blos auf die Brechungsebene an dem Unterſtützungspunkte, ſondern auf alle mit dieſer Brechungsebene parallelen Durchſchnitte. Damit alſo kein Bruch erfolge, muß ein jeder dieſer Durchſchnitte ſolche Dimenſionen haben, daß die Wirkung der Kraft, die mit ſolchem Durchſchnitt correſpondirt, nicht größer als ſein Widerſtand iſt; und da ein überflüſſiger Widerſtand eine verlohrne und überflüſſige Kraft ſeyn würde, ſo folgt daraus, daß die vortheilhafteſte Form, welche man einem ſolchen Körper geben kann, diejenige iſt, wodurch er in jedem Punkte ſeiner Länge dem auf ihn wirkenden Gewichte gleichmäßig widerſtehen kann. Wenn man die Körper von überall gleichem Widerſtande macht, ſo erhalten ſie auch zugleich das möglich kleinſte Volumen, und man verfährt dabey alſo nach den Geſetzen der Natur, welche alle ihre Arbeiten mit der größtmöglichen Erſparniß der Mittel bewirkt.

Die Erzeugniſſe der Natur unterſcheiden ſich von den durch menſchliche Induſtrie hervorgebrachten Werken dadurch weſentlich, daß bey jenen Mittel und Zweck vollkommen zu einander paſſen. Das eine kann ohne das andere keine Veränderung leiden, oder vielmehr, aus einer neuen Urſache entſteht jedesmahl eine neue Wirkung. Bey den durch menſchliche Kunſt und Arbeit hervorgebrachten Produkten exiſtirt kein nothwendiges Verhältniß zwiſchen Mittel und Zweck. Wenn wir z. B. ein beſtimmtes Gewicht zu halten haben, ſo iſt es gleichgültig, ob wir dazu einen Faden nehmen, der gerade ſtark genug iſt, oder ob wir einen Strick von überflüſſiger Stärke dazu auswählen. Wäre hingegen daſſelbe Gewicht von der Natur unterſtützt, ſo würde dieſes vermittelſt Fibern Statt haben, deren Organiſation ſo beſchaffen wäre, wie ſie gerade für dieſen Zweck ſeyn müßte, ſo wie deren Lage gegen einander die möglich vortheilhafteſte Geſtalt bilden würde. Die Vollkommenheit iſt ein Punkt in einem unermeßlichen Raum, wozu die Natur ohne Mühe gelangt, den wir aber nur durch ein gewiſſes Herumtappen finden.

Aus der Natur lernen wir die unendliche Weisheit erkennen, die ſie regiert, und bisweilen gelingt es uns, den Schle er ein wenig zu heben, der uns ihre ewigen Geſetze verhüllt. Auf dieſe Weiſe wurde Galilei, nach ſeinen eigenen Worten, zu der Entdeckung von der einförmig beſchleunigenden Bewegung ſchwerer Körper wie an der Hand geführt *). Maupertuis fand ſo die Geſetze von der Brechung des Lichtes, und des Stoßes der Körper, denn das Princip von der kleinſten Wirkung, welches wir dieſem Geometer ſchuldig ſind,

---

*) Ad inueſtigationem motus naturaliter accelerati nos quaſi manu duxit animadverſio conſuetudinis, atque inſtituti ipſiusmet naturae in ceteris ſuis operibus omnibus; in quibus exerendis vti conſueuit mediis primis, ſimpliciſſimis, facillimis. Neminem enim eſſe arbitror, qui credat natatum aut volatum ſimpliciori aut faciliori modo exerceri poſſe, quam eo ipſo, quo piſces et aues inſtinctu naturali vtuntur. Dum igitur lapidem ex ſublimi a quiete deſcendentem noua deinceps velocitatis acquirere incrementa animaduerto, cur talia additamenta ſimpliciſſima, atque omnibus magis obuiá ratione fieri non credam? quod ſi attente inſpiciamus, nullum additamentum, nullum incrementum magis ſimplex inueniamus, quam illud quod ſemper eodem modo ſuper addit, etc. (Dialogo III. del Galileo).

Was Galilei hier von der Bewegung ſchwerer Körper ſagt, iſt aus folgender Bemerkung von Euler leicht herzuleiten:

Cum mundi vniuerſi fabrica ſit perfectiſſima et a creatore ſapientiſſimo abſoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat. Quam ob rem dubium prorſus eſt nullum, quin omnes mundi effectus ex cauſis finalibus, ope methodi maximorum et minimorum aeque feliciter determinari queant atque ex ipſis cauſis efficientibus. (De curuis elaſticis, Lauſanne 1744.)

Denn nennt man allgemein F die Kraft, die auf einen Körper M wirkt, und du deſſen Geſchwindigkeit während des Augenblicks dt, ſo iſt es klar, daß die Größe der Bewegung des Körpers, oder M du dem durch die beſchleunigende Kraft F dt hervorgebrachten Effect gleich iſt. Man hat alſo $F = \frac{M\,du}{dt}$, welcher Ausdruck bey der freyen Bewegung der Körper ein Maximum ſeyn muß. Dieß giebt $d\left[\frac{M\,du}{dt}\right] = 0$, oder $\frac{M\,du}{dt} = F =$ einer beſtändigen Größe, woraus alſo folgt, daß die erhaltene Geſchwindigkeit mit der Zeit im Verhältniß iſt, welches Galilei annahm, und worauf er ſeine Theorie gründete. Wenn er dieſen Satz nicht bewies, ſo rührt das daher, weil die Art der eben angeführten Beweiſe damahls noch nicht erfunden waren.

iſt eigentlich nur ein allgemeiner Ausdruck derſelben Ideen, die Galilei ſchon vor ihm gehabt hatte. Euler, indem er weiter darüber nachdachte, machte das Princip von Maupertuis noch allgemeiner durch die davon gemachte Anwendung auf die Bewegung der geworfenen Körper. Der Bürger Lagrange hat dieſes Princip in neuern Zeiten noch mehr ausgedehnt *), indem er es weniger als eine metaphyſiſche Wahrheit, ſondern als ein einfaches und natürliches Geſetz der Mechanik anſah.

Die Theorie der feſten Körper von gleichem Widerſtande iſt eigentlich nur eine Anwendung eben dieſes Princips. Unter einer unendlichen Anzahl feſter Körper von einem beſtimmten Widerſtande haben dieſe die möglich kleinſte Maſſe. Wenn wir alſo den Körpern, welche wir uns zu der Conſtruction der Maſchinen bedienen, um dadurch unſere Kräfte zu vermehren, dieſe Form geben, ſo nähern wir uns dadurch möglichſt der Vollkommenheit, welche alle Werke der Natur ſo ſehr auszeichnen, oder mit einem Worte, wir handeln zweckmäßig.

Hat die Natur dieſe vortheilhafte Form auch in dem Mechanismu der animaliſchen Oekonomie beybehalten? Die Federn der Vögel geben uns davon ein merkwürdiges Beyſpiel. Sie ſind wie an ihren Enden eingeklemmte feſte Körper anzuſehen, die dazu beſtimmt ſind, während des Fluges der Vögel auf die Luft zu ſchlagen. Dieſe Flüſſigkeit wirkt nun wieder auf ſie zurück, und es iſt alſo anzuſehen, als wenn ſie der Wirkung eines gewiſſen, auf ihrer ganzen Länge vertheilten Drucks ausgeſezt wären, der ſie zu zerbrechen trachtet. Um alſo möglichſt leicht zu ſeyn, müſſen ſie dieſer Wirkung überall gleichmäßig widerſtehen. Man ſieht nun auch wirklich, daß die Brechungsebenen des feſten Theils der Federn von ihrem Anfange bis ans Ende nach einem gewiſſen Geſetze abnehmen, ſo daß die letzte gleich Null iſt, und dieß iſt eine charakteriſtiſche Eigenſchaft für feſte Körper von überall gleichem Widerſtande.

Galilei hat zuerſt erwieſen, daß ein Cylinder mit einer paraboliſchen Baſis, wenn er nach einer Ordinate ſeiner Baſis, deren Ebene vertikal angenommen wird, horizontal eingeklemmt iſt, die Eigenſchaft hat, der Wirkung eines an ſeinem Ende angehängten Gewichtes gleichen Widerſtand zu leiſten. Dieſer Körper iſt gleichſam der Stamm aller feſten Kör-

*) Mécanique analytique.

per von gleichem Widerſtande, die man bisher entdeckt hat. Durch ähnliche Betrachtungen gelangte Galilei zwar bald dahin, eine viel größere Anzahl zu finden, indeß hat er ſich doch einzig mit dieſem Falle beſchäftiget.

Was ſeine Hypotheſe über die Cohärenz der Körper betrift, ſo muß hier bemerkt werden, daß er ſie durch keine Verſuche beſtätigt hat. Unter den Schülern, welche in ſeinen Werken die Elemente einer neuen Wiſſenſchaft ſtudierten, hätte ſich doch wohl irgend einer finden ſollen, der es unternommen hätte, dieſe Hypotheſe durch Verſuche zu begründen, um ſo mehr, da Galilei es niemahls unterließ, die Nützlichkeit ſeiner Theorie für die mechaniſchen Künſte durch Beyſpiele anſchaulich zu machen. Demungeachtet aber wurden die erſten Verſuche über den Widerſtand feſter Körper nicht in Italien angeſtellt, ſondern wir ſind ſie einem Schweden Nahmens P. Wurtzius ſchuldig, wie aus dem Briefe hervorgeht, den er 1657 *) an François Blondel ſchrieb. Dieſer franzöſiſche Baumeiſter war der zweyte, der über dieſe Materie ſchrieb. Es ſcheint, daß er ſich nicht ſehr geeilt habe, ſeine Entdeckungen bekannt zu machen; denn in einem Briefe an W. vom Jahre 1661 **) ſagt er, daß er ſchon 1649 ein Werk über den Widerſtand der feſten Körper unter dem Titel: Galilaeus promotus geſchrieben habe.

Der Gegenſtand ſeiner Correſpondenz mit Wurtzius betraf vorzüglich die Berichtigung einer von Galilei gemachten Suppoſition über die feſten Körper von gleichem Widerſtande. Dieſer hatte nähmlich angenommen, daß an ihren Enden unterſtützte feſte Körper, um in allen Puncten einen gleichen Widerſtand zu leiſten, durch die Vereinigung zweyer gleichen und ähnlichen paraboliſchen Cylindern, deren Ebenen der erzeugenden krummen Linie vertikal ſind, gebildet werden müßten. Dieſe Annahme iſt richtig, wenn die Laſt in der Mitte ihrer Länge bleibt; wird aber die Lage der Laſt verändert, ſo leiſtet ein ſolcher Körper nicht mehr einen gleichförmigen Widerſtand. Soll dieſes Statt haben, ſo müſſen die vertikalen Durchſchnitte Ellipſen oder Zirkel ſeyn. Dieſes bemerkt Blondel, und wenn man dieß,

*) Dieſer Brief iſt in einer von mehrern Mitgliedern der Akademie der Wiſſenſchaften veranſtalteten Sammlung mathematiſcher Abhandlungen angeführt (in Fol. 1676).

*) F. B. epiſtola ad P. W. in qua ſamoſa Galilaei propoſitio diſcutitur circa naturam lineae, qua trabes ſecari debent, vt ſint aequalis vbique reſiſtentiae, et in qua lineam illam, non quidem parabolicam, vt ipſe Galilaeus arbitratus eſt, ſed ellipticam eſſe, demonſtratur. Data Pariſiis, Iulii 1661.

welches bey Galilei wahrſcheinlich nur aus Unachtſamkeit entſtand, einen Fehler nennen kann; ſo kann man nicht leugnen, daß er der erſte war, der die Correction deſſelben angezeigt hat.

Alexander Marchetti, Profeſſor der Philoſophie in Piſa, gab im Jahre 1669 *) eine Abhandlung über den Widerſtand der feſten Körper heraus, und behauptete, daß er hierzu durch dieſen Fehler veranlaßt worden ſey. Es mag dieſe Verſicherung nun Glauben verdienen oder nicht, und er mag die beyden Briefe von Blondel und Wurzius gekannt oder nicht gekannt haben; ſo gab doch dieſe Schrift den Italieniſchen Geometern, ſeinen Zeitgenoſſen, Veranlaſſung zu einem unangenehmen Streit, wovon in der Geſchichte der Wiſſenſchaften unglücklicher Weiſe nur zu viele Beyſpiele vorkommen **).

Vincent Viviani, gleich berühmt wegen ſeiner Dankbarkeit gegen Ludwig XIV, wie wegen ſeiner großen Achtung für Galilei, hatte ſich ſeit 1644 vorgenommen, eine vollſtändige Ausgabe von den Werken dieſes Philoſophen, mit einem Commentar und mit mehreren von ihm ſelbſt über verſchiedene Theile der Naturlehre aufgeſtellten Lehrſätzen verſehen und bereichert, heraus zu geben. Er betrachtete dieſes Werk als einzig würdig ſeinem Wohlthäter dargebracht zu werden, und beſchäftigte ſich eben damit die Theorie von dem Widerſtande der feſten Körper zu erweitern, als er erfuhr, daß Marchetti die eben erwähnte Abhandlung heraus zu geben Willens ſey. Viviani befürchtete, daß dieſer ihm zuvorkommen möchte, und wußte den Cardinal Leopold von Medicis dahin zu bringen, daß dieſer den Marchetti dazu bewegen ſollte, die Herausgabe ſeines Werkes zu unterlaſſen. Aber ungeachtet der Verbindlichkeit, welche der Profeſſor von Piſa gegen dieſen Prälaten wegen mehrerer ihm geleiſteten Dienſte hatte, konnte er es doch nicht weiter bringen, als daß M. den Druck ſeiner Abhandlung ſechs Monat zurück ſchob. Wenn Viviani's Werk während dieſer Zeit nicht erſcheinen ſollte, ſo behielt er die Freyheit, das ſeinige heraus zu geben. Wegen überhäufter Geſchäfte konnte V. hiervon keinen Gebrauch machen, und nach Verlauf dieſer Zeit benutzte M. der ſich vorbehaltenen Freyheit.

---

*) In demſelben Jahre erſchien zu Lyon eine phyſikaliſche Abhandlung von einem Jeſuiten, Nahmens Honore Fabri. Das V Buch iſt betitelt: de reſiſtentia corporum. Der Verfaſſer hat die Hypotheſe des Galilei angenommen. Er ſcheint der erſte geweſen zu ſeyn, der von dem Widerſtande ſchief belaſteter Körper gehandelt hat.

**) Vitae Italorum, qui in ſcientia floruerunt. Auctore Angelo Fabroni. Tom. I, II et VIII.

Er war noch Profeſſor der Philoſophie in Piſa, als 1700 der Pater Grandi nach Rom berufen wurde. Der wohlverdiente Ruf dieſes Geometers flößte M. den Verdacht ein, daß er in ihm ſeinen Nachfolger in einem Amte ſah, welches er für ſeinen Sohn zu erhalten wünſchte. Da er nun einige Zeit darnach behauptete, in Grandi's Werk über die Quadratur des Zirkels mehrere Fehler entdeckt zu haben; ſo verſicherte dieſer, anſtatt ſeine Schrift zu vertheidigen, daß ſein Gegner wenige mathematiſche Kenntniſſe beſitze; daß die unter ſeinem Nahmen gedruckte Abhandlung über den Widerſtand feſter Körper eigentlich von Borelli ſey, und daß acht Jahre vor der Erſcheinung dieſer Schrift F. Blondel den Lehrſatz von dem gleichen Widerſtande an ihrem Ende unterſtützter feſter Körper ſchon bekannt gemacht habe, welchen M. entdeckt zu haben ſich rühme, und auf dieſe allgemein bekannte Thatſache glaube er alſo, ihn der Unwiſſenheit oder des böſen Willens beſchuldigen zu können *).

Wir würden dieſe literariſche Streitigkeit nicht erwähnt haben, wenn ſie nicht zu einer Vertheidigungsſchrift Gelegenheit gegeben hätte, welche Grandi 1712 **) herausgab. Dieſe Schrift enthält eine Theorie der feſten Körper von gleichem Widerſtande, die wegen der Eleganz der Conſtructionen, wodurch er ihre Formen beſtimmt, merkwürdig iſt. Indem er alſo des Marchetti Werk unterſuchte, um Fehler darin zu finden, wurde er veranlaßt, dieſe Materie zu ergründen, weshalb er ſich vornahm, das zu vollenden, was Viviani angefangen hatte, und ſchrieb hierzu die in Galilei's vollſtändigen Werken eingerückte Abhandlung über den Widerſtand der feſten Körper. Dieſe Abhandlung iſt wegen der Allgemeinheit der hier entwickelten Methoden, ſo wie wegen der Ausführlichkeit, in ſo fern ſie damahls ſchon Statt haben konnte, um ſo mehr empfehlungswürdig, da dieſe einzige Schrift ſchon allein hinreichen würde, ihrem Verfaſſer einen ausgezeichneten Platz unter die Geometer des vorigen Jahrhunderts zu erwerben.

Während die Italieniſchen Mathematiker über den Widerſtand der feſten Körper ſich ſtritten, ohne daß auch nur ein einziger es wagte, die Hypotheſe des Galilei zu unterſuchen,

---

*) Der Pater Grandi ſtützte dieſe Beſchuldigung auf die auffallende Aehnlichkeit des Titels, welchen Blondel ſeinem 1649 geſchriebenen Werke gegeben hatte, mit dem, welchen Marchetti dem ſeinigen Anfangs zu geben willens war. Der erſte iſt: Galilaeus promotus und der zweyte: Galilaeus ampliatus.

**) Riposta apologetica del maeſtro Guido Grandi camaldoleſe, etc. (Lucae 1712). Dieſes Werk iſt ſehr ſelten, indeß findet man davon einen ausführlichen Auszug in dem VI der Supplementa Actorum eruditorum.

welche ſie vielmehr alle aus Achtung für die Meinungen dieſes groſſen Mannes zutrauensvoll annahmen, waren die Geometer und Phyſiker des übrigen Europa's ebenfalls mit dieſem Gegenſtand beſchäftigt, wobey ſie aber für die Fortſchritte unſerer Wiſſenſchaften einen beſſern Weg einſchlugen.

Bey Gelegenheit einer Röhrenleitung, die Mariotte, ein Mitglied der Akademie der Wiſſenſchaften, i. J. 1680 anzulegen, und dabey die Dicke der Röhren zu beſtimmen hatte, unternahm er einige Verſuche über den Widerſtand der feſten Körper. Zu dieſen Verſuchen wählte er Körper, und gebrauchte dazu eine Methode, wodurch er nothwendig andere Reſultate, als nach Galilei's Theorie erhalten mußte. Da er dieſes nun auch wirklich ſo fand, ſo erdachte er eine andere Hypotheſe *).

Es exiſtiren keine Körper, die vollkommen hart ſind, und eben ſo wenig gibt es vollkommen elaſtiſche Körper. Alle bekannte Körper haben mehr oder weniger von der einen oder von der andern Eigenſchaft. Galilei nahm die Körper als vollkommen unausdehnbar an. Zu den Mariottiſchen Verſuchen wurden aber Körper genommen, die ſich ausdehnen ließen. Galilei's Hypotheſe, und die, wozu die Verſuche führten, ſind alſo für Körper von verſchiedenen Eigenſchaften anwendbar, und ſchließen ſich daher nicht gegenſeitig aus, obgleich ſie zu verſchiedenen Reſultaten führen.

Da nun das, welches Mariotte über dieſen Gegenſtand heraus gab, Galilei's Theorie zu widerſprechen ſchien, ſo wurde dadurch die Aufmerkſamkeit der Geometer rege gemacht. Leibnitz unterſuchte zuerſt die beiden Suppoſitionen, und da er oft bemerkt hatte, daß vor dem Bruche eines jeden Körpers immer eine gewiſſe Biegung Statt hat; ſo ſchloß er daraus, daß alle Körper aus ausdehnbaren Fibern beſtehen, welche in dem Augenblicke des Bruches Verhältniß ihrer Ausdehnung widerſtehen, worauf er durch einen einfachen Calcul zu Reſultaten gelangt, welche nahebey mit Mariott's Beobachtungen übereinkommen.

Aus dieſem in die Leipziger Acten von 1684 eingerückten Memoire von Leibnitz ſieht man, welches Licht er in dieſe Materie gebracht haben würde, wenn er ſie gründlicher hätte behandeln wollen. Aber er übte ſein Genie lieber an höheren Speculationen, obgleich er wohl

*) Traité du mouvement des Eaux, V partie.

wußte, wie viele nützliche Lehrſätze über dieſen Gegenſtand noch zu erfinden waren, deren Entdeckung er aber, wie er ſelbſt ſagt *), andern überlaſſen wollte.

Leibnitzens Syſtem über die integrirenden Fibern der Körper machte, daß außer Italien Galilei's Hypotheſe vergeſſen wurde. Man betrachtete nun alle feſte Körper als minder oder mehr elaſtiſch, und nach dieſer Hypotheſe wurde ihr Widerſtand berechnet. Indeß iſt es auch wahr, was dieſer Geometer annimmt, daß die in dem Augenblick des Bruches um irgend eine Achſe ausgedehnten Fibern der Gewalt, welche dieſen Bruch hervorzubringen trachtet, im Verhältniſſe ihrer Ausdehnung widerſtehen? Iſt es nothwendig, daß dieſes Verhältniß zwiſchen dem Widerſtand und der Ausdehnung der Fibern, ſo einfach es auch iſt, Statt haben muß? Sobald man nur auf dieſen Gedanken gekommen iſt, ſo wird man auch gleich zugeben müſſen, daß dieſes Verhältniß eben ſo gut das der Coordinaten einer krummen, wie der geraden Linie ſeyn könne.

Nachdem Varignon, der die Entdeckungen ſeiner Zeitgenoſſen in der Geometrie faſt immer allgemeiner machte, dieſen Gedanken gefaßt hatte, unternahm er 1702, eine Formel für den Widerſtand feſter Körper zu finden, welche unabhängig von der Zähigkeit der Fibern, und für alle mögliche Hypotheſen anwendbar ſeyn ſollte.

Die Hauptfrage blieb aber dennoch immer unentſchieden, denn um Varignons Formel anwenden zu können, mußte man denn doch in der That zuvor das Verhältniß kennen, welches zwiſchen dem Widerſtande der Fibern und dem Grade ihrer Ausdehnung Statt hat. Leibnitz hatte, wie geſagt, angenommen daß dieſe Größen proportional wären. Unter beſondern Umſtänden war dieſer Satz durch die Erfahrung gerechtfertigt, und ſo hielt man ſich berechtigt, ihn als allgemein geltend anzunehmen, indem man behauptete, daß eine abſolute Genauigkeit faſt immer überflüſſig ſey. Indeß kann dieſer Grund, der Leuten, die keinen eigentlich wiſſenſchaftlichen Geiſt haben, faſt immer genügt, einem Geometer nicht befriedigend ſeyn. Er muß entweder die Wahrheit finden, oder auch zeigen, daß wir ſie zu finden nicht im Stande ſind.

Durch dieſe Betrachtung wurde Jacob Bernoulli veranlaßt, das Leibnitziſche Syſtem noch einmahl zu unterſuchen. Da er bemerkt hatte, daß im Augenblick des Bruches ein Theil

---

*) Cujus (reſiſtentiae ſolidorum) ſpeciales caſus, ſi quis pertractare vacabit, is multa perelegantia theoremata deprehendet. (Acta eruditorum, Iulii 1684).

der Fibern der feſten Körper ſich ausdehnen, während der übrige Theil zuſammen gedrückt wird; ſo bewies er in einem 1705 herausgegebenen Memoire *), daß weder die Ausdehnung, noch das Zuſammendrücken gleichartiger Fibern von einerley Dimenſionen, die mit verſchiedenen Gewichten beladen ſind, dieſen Gewichten proportional ſind; denn, ſagte er, wenn dieſes ſeyn ſollte, ſo müßte es Fälle geben, wo das Zuſammendrücken mehr als ihre ganze Länge betragen würde, welches eine Abſurdität ſeyn würde. Um aber dieſes Raiſonnement ganz auſſer allen Zweifel zu ſetzen, wollte er es durch Verſuche beſtätigen. Er nahm hierzu eine drey Fuß lange Darmſeite, und beſchwerte ſie ſucceſſive mit 2, 4, 6 und 8 Pfund, und bemerkte, daß ſie ſich um 9, 17, 23 und 27 Linien verlängerte, da ſie ſich um 9, 18, 27 und 36 Linien hätte verlängern müſſen, wenn dieſe Veränderung den Gewichten hätte proportional ſeyn ſollen.

Die einzige aus dieſer Bernoulliſchen Bemerkung herzuleitenden Folgerung iſt dieſe, daß Leibnitzens Meinung über die Ausdehnung der Fibern eben ſo wenig, als die Galileiſche, ſtrenge richtig iſt. Aber er zeigt nicht, welche andere Suppoſition annehmbarer iſt; er zeigt vielmehr, welche Schwierigkeiten es haben würde, eine richtigere Hypotheſe zu erdenken.

Es war wohl erlaubt, bey einem Puncte ſtehen zu bleiben, den ſelbſt ein Bernoulli nicht zu überſchreiten wagte, und wirklich haben die Bemühungen der Phyſiker und Geometer ſich hierauf auch beſchränkt. Sie begnügten ſich damit, die Leibnitziſche Hypotheſe anzunehmen, nicht bloß, weil ſie ſo einfach iſt, ſondern auch, weil ſie ſo glücklich mit den Beobachtungen übereinkommt, und ſo wenig von der Wahrheit abweicht, daß ſelbſt, wenn wir auch in die Geheimniſſe über die Bildung der Körper eindringen könnten, wir dennoch für die Anwendung keine brauchbarere Reſultate, als ſchon durch dieſe Hypotheſe erhalten würden, indem bey der Bildung der Körper ſo unendlich viele Zufälligkeiten mit einwirken.

Die Frage über den Widerſtand der feſten Körper hat alſo, wie man ſieht, im Anfange des vorigen Jahrhunderts die größten mathematiſchen Genie's beſchäftiget. Auch minder berühmte Geometer haben ſie zu beantworten geſucht. Parnet, Mitglied der Akademie der Wiſſenſchaften, gab 1710 eine Theorie der mit einem unveränderlichen Gewichte beladenen feſten Körper von gleichem Widerſtande heraus. Er bemerkte ferner, daß bey allen feſten Körpern,

*) Mémoires de l'academie des ſciences.

welche dieſe Eigenſchaft nicht haben, eine Brechungsebene Statt finden muß, die ſchwächer als alle übrigen iſt, und daß folglich in dieſer Ebene der Bruch erfolgen muß. Er gibt endlich an, wie man die Lage derſelben finden kann. Aber dieſe Methode, obgleich er ſie für allgemein ausgibt, beſchränkt ſich auf den einzigen Fall, wenn das Gewicht unveränderlich und an einem Puncte befeſtiget iſt, und iſt alſo nicht brauchbar, wenn daſſelbe auf der ganzen Länge des feſten Körpers nach einem gewiſſen Geſetze vertheilt iſt.

Zu dem, was wir jetzt noch zu ſagen haben, müſſen wir einige Jahre wieder zurückgehen, und uns wieder an das ſchon erwähnte Memoire von Jacob Bernoulli erinnern. Indem er bemerkte, daß die biegſamen Körper, wenn ſie ſich wirklich biegen, dieſes nach einer gewiſſen krummen Linie erfolgt; ſo dachte er, daß dieſe krumme Linie von ihrer Elaſticität abhängen müſſe. Er unterſuchte nun, welche Krümme eine elaſtiſche Linie annimmt, wenn man ihre Enden gegen einander zu biegen ſucht, und machte die Gleichung derſelben 1705 bekannt, ohne dieſe Unterſuchung ſehr weit fortzuſetzen. Den Nutzen derſelben für die Theorie des Widerſtandes feſter Körper ſcheint er nicht gekannt zu haben.

Nicht gerade immer machen die Erfinder der Wiſſenſchaften die beſten Anwendungen davon. Gewöhnlich begnügen ſie ſich, neue Wahrheiten entdeckt zu haben, und überlaſſen das Uebrige ihren Nachfolgern. Dieſe unterſuchen ſie dann nach allen möglichen Seiten, und werden dadurch manchmahl auf Folgerungen geleitet, welche ſelbſt die Erfinder niemahls vorausgeſehen haben würden. Dieß iſt in wenigen Worten die Geſchichte der elaſtiſchen Linien. Geometer, welche nach Jacob Bernoulli kamen, und vorzüglich der berühmte Euler, haben die meiſten Eigenſchaften dieſer Linien bekannt gemacht. Dem letztern war es vorbehalten, die Theorie dieſer Linien auf denjenigen Gegenſtand anzuwenden, durch welchen ihre Entdeckung war veranlaßt worden.

Bisher hatte man ſich mit dem Widerſtande feſter Körper beſchäftigt, inſofern eine Kraft perpendikulär auf die Länge ihrer Fibern ſie zu zerbrechen ſtrebt. Vermittelſt einer allgemeinen Formel kann man dieſen Widerſtand berechnen, die Kraft mag in Rückſicht des Körpers eine Richtung haben, welche ſie wolle, nur einen einzigen Fall ausgenommen, für welchen dieſe Formel nicht paßt; der Fall nähmlich, wenn die Richtung der widerſtehenden Fibern und die Richtung der dieſelben zuſammendrückenden Kraft parallel unter einander ſind. Dieſe Frage blieb unbeantwortet, bis Euler 1744 in einem Zuſatze von mehreren intereſſanten Lehrſätzen von den elaſtiſchen krummen Linien die Regel angab, nach welcher dieſer neue Ge=

genſtand berechnet werden muß *). Er fand, daß dieſer Widerſtand im Verhältniß der abſoluten Elaſticität, und im umgekehrten Verhältniſſe des Quadrats der Länge der als prismatiſch oder cylindriſch angenommenen feſten Körper iſt.

Wenn ein, wie ein Gebund Fibern angenommener feſter Körper parallel mit der Länge dieſer Fibern belaſtet iſt; ſo ſieht man nicht gleich ein, wie hier Biegung Statt haben kann, weil kein Grund iſt, warum dieſe Biegung mehr nach der einen, als nach der andern Seite erfolgen ſollte. Die Theorie zeigt indeß, daß er bey einem beſtimmten Gewichte ſich zu biegen anfangen muß, dahingegen ein kleineres Gewicht noch keine Biegung erzeugen kann, wodurch alſo das Geſetz der Continuität gewiſſermaßen unterbrochen iſt. Euler, durch dieſes ſcheinbare Paradoxon überraſcht, ſucht es in einer gelehrten Abhandlung über die Stärke der Säulen zu erklären, welche er in den Schriften der Berliner Academie von 1757 bekannt machte.

Die abſolute Elaſticität, oder das Moment der Elaſticität, womit die feſten Körper der Biegung mit mehr oder weniger Gewalt widerſtehen, läßt ſich, da die Gleichung dafür nicht integrabel iſt, durch keine endliche Größen angeben. Da aber das Moment der Elaſticität unabhängig von der Krümmung des Körpers iſt; ſo kann man dieſe ſo klein annehmen, um das Element der Krümmung dem der Abſciſſe gleichſetzen zu können. Hierdurch erhält man für den Krümmungshalbmeſſer einen viel einfachern Ausdruck, und ſonach eine leicht zu integrirende Gleichung, wodurch ſich alsdann der geſuchte Werth, vermittelſt einer Function von den Coordinaten, der dieſer Gleichung zugehörenden Krümme und der die Biegung erzeugenden Laſt findet. Dieſes Mittel, die abſolute Elaſticität anzugeben, verdanken wir wiederum Eulern. So hat er alſo, obgleich wir von ihm ſelbſt keine Verſuche haben, die beſte Anweiſung dazu ertheilt, und den Weg angegeben, den wir zu verfolgen haben, um beſſere Kenntniſſe über dieſen wichtigen Gegenſtand zu erlangen.

Am Ende ſeiner Abhandlung unterſucht er den Widerſtand ſolcher Säulen, die zwiſchen ihren Enden keine unveränderliche Brechungsebenen haben. Dieſe Unterſuchung würden wir auf heterogene Körper anwenden können, wenn ſie nicht ſo vielen Schwierigkeiten unterworfen wäre.

---

*) De curvis elaſticis. Im Anhange von ſeinem Werke Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, etc. 1744.

Dieſe Art des longitudinalen Widerſtandes, woran die Geometer des vorletzten Jahrhunderts nicht dachten, beſchäftigte nacheinander die größten Männer des letztverfloſſenen Jahrhunderts.

Der Bürger Lagrange wollte wiſſen, ob der ſeit Vitruv von allen Architecten befolgte Gebrauch, die Säulen auf ein Drittel ihrer Höhe zu verdicken, dieſen eine größere Stärke gebe; er unterſuchte deshalb 1769 *) den Widerſtand einer parallel mit ihrer Länge gedrückten elaſtiſchen Linie, und erhielt gerade denſelben Ausdruck, zu welchem auch Euler gekommen war. Die Beſtimmung der den Säulen zu gebenden vortheilhafteſten Figur iſt der Gegenſtand einer vortrefflichen Abhandlung dieſes gelehrten Geometers, welche er in dem Vten Bande der Schriften der Turiner Academie bekannt machte **). Er unterſucht zuerſt die Krümmung, nach welcher ſie ſich zu biegen anfangen, und vermittelſt Integrationen der Zirkelbögen findet er, daß bey einer hinreichenden Laſt die Anzahl der Biegungspuncte dieſer Krümmung unbegrenzt iſt. Alsdann unterſucht er ſeine gefundene Gleichung genauer, und beweiſet, daß die größte Ordinate imaginär iſt, wenn die Laſt der Säule nicht eine gewiſſe Grenze erreicht hat. Hierdurch verſchwindet die von Eulern gemachte Schwierigkeit gänzlich.

Nachdem er dieſe Schwierigkeit gehoben hat, unterſucht er, welcher von denjenigen durch die Umdrehung der coniſchen Sectionen entſtandenen Körper den größten mit ihren Fibern parallelen Widerſtand leiſtet, wenn ihre Maſſen und Höhen ein und dieſelben ſind. Er findet, daß die durch eine gerade Linie erzeugte Conoide dieſe Eigenſchaft beſitzt, und daß unter allen Säulen, welche die Form eines abgekürzten Kegels haben, diejenige, deren untere und obere Baſis gleich ſind, den größten Widerſtand leiſtet. Er unterſuchte dieſe Frage in ihrer ganzen Ausdehnung auch durch die Variations-Methode, und findet dieſelbe Auflöſung wieder, daß nähmlich das Verdicken der Säulen wohl zu ihrer Eleganz, nichts aber zu einer größern Stärke beytragen kann, und daß alſo, wenn man von ihrem eigenen Gewichte abſtrahirt, die cylindriſche Figur die beſte iſt.

Außer den aus biegſamen Fibern zuſammengeſetzten Körpern, gibt es noch eine Menge anderer, die aus neben einander gleichſam zuſammengeleimten Theilchen beſtehen, wie

---

*) Mémoire ſur la force des reſſorts pliés (Academie de Berlin, 1769).

**) Collection academique de Turin, années 1770—1775.

die Steine, und überhaupt alle Metalle. Man ſieht leicht ein, daß die Geſetze des Widerſtandes feſter Körper von denen, welche wir bisher betrachtet haben, eben ſo ſehr verſchieden ſeyn müſſen, als ihre Organiſation von der Organiſation der ſieberartigen Subſtanzen abweicht. Ebenfalls ſieht man leicht ein, daß die Kenntniß von dieſen Geſetzen ungemein wichtig ſeyn muß, da bey allen Arten von Bauwerken ſolche Materialien oft gebraucht werden. Aber um auch nun den Gedanken zu faſſen, ſich mit dieſem Gegenſtande zu beſchäftigen, muß man ſchon durch ſeine Lage dazu genöthigt werden. Dieß war glücklicherweiſe der Fall, worin der Bürger Coulomb, geweſener Officier beym Genie-Corps und Mitglied des National-Inſtituts, ſich befand. Seine ſinnreiche Hypotheſe über die Cohäſion, und die Grundſätze, wonach er den Widerſtand 1773 *), zu berechnen vorſchlägt, ſind in einer Abhandlung enthalten, welche für die Künſte um ſo wichtiger iſt, da darin die Theorie beſtändig durch die Erfahrung unterſtützt iſt. Wir können ſeine Ideen nicht beſſer, als durch ſeine eigenen Worte darſtellen:

„Wenn man annimmt, daß ein Pfeiler von Mauerwerk nach einer gegen den Horizont geneigten Ebene durchſchnitten iſt, ſo daß die beyden Theile in dieſem Durchſchnitte „durch eine gegebene Cohäſion vereinigt ſind, während die ganze Maſſe übrigens vollkommen „ſolide iſt, oder durch eine unendlich große Adhäſion zuſammen gehalten wird, und daß ferner „dieſer Pfeiler mit einem Gewichte beladen iſt; ſo wird dieſes Gewicht dahin ſtreben, den „obern Theil des Pfeilers von dem untern nach der geneigten Ebene, worin ſie ſich berühren, „herunter zu ſchieben. Im Zuſtande des Gleichgewichtes wird alſo der mit der Durchſchnitts-„Ebene parallel wirkende Theil des Gewichtes gerade ſo groß ſeyn, als die Cohäſion. Wenn „man nun bedenkt, daß, im Falle alle Theile homogen ſind, die Adhäſion für alle Theile „gleich iſt; ſo muß, wenn der Pfeiler eine gewiſſe Laſt ſoll tragen können, die zerlegte Kraft „des Drucks nach keinem einzigen Durchſchnitt den obern von dem untern Theil trennen können. „Um alſo das größte Gewicht zu beſtimmen, welches ein Pfeiler tragen kann, muß man unter „allen Durchſchnitten denjenigen ſuchen, wo ſelbſt ein Minimum des Gewichtes mit der Cohäſion im Gleichgewichte iſt, indem alsdann jedes kleinere als dieſes beſtimmte Gewicht „für alle übrigen Durchſchnitte unzureichend ſeyn wird, den Pfeiler zu zerbrechen.“

Des Bürgers Coulomb Memoir bietet alſo eine der glücklichſten Anwendungen dar, welche von der Methode des Größten und Kleinſten auf die Unterſuchung der von den

*) Mémoires préſentés à l'académie des ſciences, t. VII.

Eigenſchaften der Körper abhängenden Phänomene je gemacht worden ſind. Je mehr man dieſe Unterſuchung fortſetzt, deſto mehr wird man einſehen, daß dieſe Methode gleichſam ein Faden iſt, um uns in dem Labyrinthe zurecht zu weiſen, in dem die Wahrheit ſich verſteckt hat; deſto mehr wird man die Gründlichkeit und Richtigkeit der von Euler geäußerten Idee erkennen: daß in der ganzen Natur keine Wirkung erfolgt, welche in gewiſſen Verhältniſſen nicht ein Maximum oder ein Minimum ſey.

Dieſer große und unermüdete Geometer hat ſich ſpäter noch einmahl wieder mit dem Widerſtande der Säulen beſchäftiget. Bisher hatte man ſie als aller Schweren beraubt angeſehen; er wollte nun den Einfluß kennen lernen, den ihr Gewicht auf ihre Biegung haben kann. In drey 1780 *) nach einander erſchienenen Diſſertationen ſucht er die Höhe einer prismatiſchen oder cylindriſchen Säule zu beſtimmen, die durch ihr eigenes Gewicht eben anfangen will, ſich zu biegen. Dieſe drey Memoire, die letzten Denkmahle des Genie's ihres unſterblichen Verfaſſers, vollenden die Theorie von dieſer Art des Widerſtandes; ſie beweiſen aber auch zugleich die Schwierigkeit dieſer Materie, denn ungeachtet er ſeine Arbeit noch mehrere mahle prüfte; ſo gelangte er in ſeiner erſten Diſſertation doch zu dem Schluſſe, daß die Höhe einer Säule unendlich seyn müßte, wenn ſie ſich durch ihr eigenes Gewicht zu biegen anfangen ſollte. Da dieſe Folgerung aber offenbar dem widerſpricht, was er ſchon vorher gefunden hatte; ſo hielt er es der Mühe werth, dieſes Paradoxon in einer zweyten Diſſertation aufzuklären. Er berückſichtigt darin einige horizontale Kräfte, welche mit zu der Biegung beytragen, und findet, daß die geſuchte Höhe in gewiſſen Grenzen eingeſchloſſen iſt. Endlich widmet er dieſem Gegenſtande noch ein drittes Memoire. Weil man aber einen hinlänglich genauen numeriſchen Werth nur durch die Summation einer gewiſſen Anzahl Glieder von verſchiedenen unendlichen Reihen finden kann; ſo war er, um hierzu zu gelangen, genöthiget, eine weitläuftige und verdrießliche Rechnung zu übernehmen, welche ihn aber, da er die Nützlichkeit derſelben für die Fortſchritte der Künſte und Wiſſenſchaften einſah, nicht abſchreckte.

Hiermit endigen ſich die Arbeiten der Geometer über die Frage, deren Geſchichte wir erzählt haben. Jetzt haben wir noch die Arbeiten der Naturforſcher anzugeben, welche durch ihre Verſuche und Beobachtungen zur Auflöſung der Frage mit beygetragen haben.

---

*) Determinatio onerum, quae columnae geſtare valent. De columnarum altitudine ſub proprio pondere corruentium (Acta Petropolitana an. 1778. pars I.)

Wir haben ſchon geſagt, daß Mariotte am Ende des vorletzten Jahrhunderts damit beſchäftiget war, über den Widerſtand einiger Körper Verſuche anzuſtellen. Aber ſeine zu dieſen Verſuchen genommenen Stücke waren theils zu klein, und theils war die Anzahl ſeiner Verſuche zu geringe, als daß ſie zur Baſis eines für die Praxis nützlichen Calculs hätten dienen können.

Indeß können wir doch denjenigen Verſuch nicht unerwähnt laſſen, welcher ihm zeigte, daß ein und derſelbe priſmatiſche feſte Körper, wenn er an ſeine beyden Ende befeſtigt iſt, einem noch einmahl ſo großem Gewichte widerſteht, als wenn dieſer Körper an ſeinen beyden Enden bloß unterſtützt iſt. Aber dieſer Verſuch, der nützlichſte und zugleich der intereſſanteſte, den er uns hinterlaſſen hat, war mit einem ſchmalen Glasſtäbchen *) angeſtellt, und konnte alſo nicht wohl auf andere Materialien, die am häufigſten gebraucht werden, und vorzüglich nicht auf Holz, welches eine ganz andere Contexture hat, angewandt werden.

Hierdurch wurde Parent in den Jahren 1707 und 1708 **) veranlaßt, Mariotte's Verſuche über ſolche an beyden Enden eingeklemmte feſte Körper zu wiederholen. Er nahm zu dieſen Verſuchen kleine Prismen von Eichenholz, und wenn er ſie nach einander erſtens an Einem Ende befeſtigte, dann ſie frey unterſtützte, und endlich ſie an beyden Enden befeſtigte; ſo fand er ihren Widerſtand in dieſen drey verſchiedenen Lagen, wie die Zahlen 4, 6 und 9. Dieſe Verſuche haben die Fehler, daß ſie erſtens mit zu kleinen Hölzern angeſtellt wurden, und zweytens, daß nicht dabey bemerkt iſt, ob dieſe Hölzer aus Einem Stücke geſchnitten waren. Dieſes iſt von großer Wichtigkeit, und hätte billig ſeyn müſſen.

Parents Verſuche waren mit Hölzern ein und zwey Fuß lang und einen Zoll dick angeſtellt, und doch glaubte er hierauf nach Galilei's und Leibnitzens Methode große Tafeln über den Widerſtand der Balken von ſechs bis dreißig Fuß lang und zehn bis achtzehn Zoll dick berechnen zu können.

Belidor urtheilte ſehr richtig, daß die Modelle, welche Parent bey ſeinen Rechnungen zum Grunde gelegt hatte, nicht mit hinlänglicher Genauigkeit beſtimmt waren. Da nun

---

*) Traité du mouvement des eaux, part. V.

**) Memoires de l'academie des ſciences.

in den meiſten Bauwerken das Holz an den beyden Enden eingeklemmt oder befeſtigt iſt; ſo wiederholte er die bis dahin über eingeklemmte Körper angeſtellten Verſuche. Er fand, daß der Bruch immer in der Mitte der Länge und gegen die Enden, bald nur gegen das eine, bald aber auch gegen beyde Enden zu gleicher Zeit erfolgte. Die belidoriſchen Verſuche haben wegen der Kleinheit der dazu gebrauchten Stücke denſelben Fehler, wie die von Parent. Er hat ſie in ſeinem zum erſtenmahle 1729 gedruckten vortreflichen Werke de la ſcience des ingenieurs beſchrieben.

In demſelben Jahre erſchien zu Leiden *) eine lateiniſche Abhandlung von Muſchenbroek über die Cohärenz der Körper. Nachdem er die Meinungen der ältern und neuern Philoſophen hierüber angeführt hat, giebt er ſelbſt einige Erklärungen davon. Zuerſt betrachtet er den Fall, wo die Körper einer Gewalt zu widerſtehen haben, die parallel mit ihrer Länge wirkend, ſie zu verlängern trachtet; dann wenn ſie einer Kraft widerſtehen, die perpendikulär auf die Richtung der Fibern iſt, und endlich wenn die Kraft parallel mit den Fibern wirkt, und ſie zuſammen zu drücken ſtrebt.

Obgleich ſeine Verſuche mit ſehr kleinen Stücken vorgenommen wurden, ſo verdienen ſie doch mehr Zutrauen, als alle vorhergehenden Experimente, ſowohl wegen der großen Sorgfalt, womit ſie angeſtellt zu ſeyn ſcheinen, als auch wegen ihrer großen Menge. Er hat hiernach eine Tabelle über die ſpecifiſche Cohäſion von mehreren Holzarten, vom Glaſe und von den Metallen verfertiget.

Er wiederholt auch die Verſuche über das eingeklemmte Holz, und findet, daß der Widerſtand deſſelben doppelt ſo groß iſt, als wenn das Holz bloß unterſtützt wird. Dieſes Reſultat kommt ſowohl mit den erſten Mariottiſchen Verſuchen, als auch mit der Theorie, wie wir bald anzuführen Gelegenheit haben werden, vollkommen überein.

Was aber vorzüglich merkwürdig bey dieſen Verſuchen iſt, und eben ſo ſehr die Genauigkeit, womit Muſchenbroek beobachtete, als die Richtigkeit der Grundſätze beweiſet, worauf die Theorie erbauet wurde, iſt dieſes, daß dieſer Naturforſcher ſchon 1729 aus ſeinen Verſuchen folgerte, der Widerſtand der Körper, wenn ſie parallel mit ihren Fibern zuſam-

*) Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum (Lugduni Batauorum 1729.)

mengedrückt werden, müſſe bey übrigens gleichen Umſtänden, im umgekehrten Verhältniſſe ihrer Länge seyn, und daß Euler 1744, nachdem er die Theorie der elaſtiſchen Linien entwickelt hat, zu eben dieſer Folgerung gelangte. Dieß iſt einer von den ſeltenen Fällen, welche in den phyſikaliſchen Unterſuchungen den Verſuchen, wie der Theorie zur gemeinſchaftlichen Stütze dienen, und würde ſchon blos dieſerwegen verdienen, in der Geſchichte der Wiſſenſchaften aufgezeichnet zu werden.

Wir ſehen, wie die Verſuche über den Widerſtand der Körper in den neuern Zeiten immer vollkommener werden. Wenn indeß die Muſchenbroekiſchen Verſuche uns der Wahrheit auch um einige Schritte näher gebracht haben; ſo iſt doch auch eben die Wahl der Körper, welche er zu den Verſuchen nahm, ſo wie die große Vorſicht, welche er glaubte anwenden zu müſſen, um alle zufälligen Urſachen, wodurch ſeine Reſultate hätten verändert werden können, zu vermeiden, wiederum Urſache, warum ſeine Reſultate für die Praxis minder brauchbar ſind. Denn die zu den Bauwerken genommen werdenden feſten Körper, und vorzüglich das Holz, ſind um ſo weniger homogen, je größer ihr Volumen iſt. Da man nun gewöhnlich genöthiget iſt, ſolche Materialien zu den Bauwerken zu nehmen, welche man am erſten haben kann; ſo war es nöthig, durch eine neue Reihe von Verſuchen eine Art von Model zu finden, wornach man in den gewöhnlichen Fällen die verſchiedenen Arten von Widerſtänden mit mehrerer Sicherheit berechnen konnte.

Die Beſtimmung eines ſolchen Models erforderte freylich eine beträchtliche Zeit und eine große Menge Materialien, um die Beobachtungen vervielfältigen zu können. Ein glücklicher Zuſammenfluß mehrerer Umſtände boten dem berühmten Buffon dieſe beyden großen Mittel dar. Von ſeinen Verſuchen, die mit Recht unſern Dank verdienen, gab er 1740 und 1741 *) Nachricht.

Es ſcheint, daß er Anfangs nicht die Idee hatte, ſeine Verſuche im Großen zu machen. Er fieng damit an, den Widerſtand der verſchiedenen Holzſchichten von dem Marke bis an die Rinde des Baumes zu unterſuchen. Er fand, daß derſelbe nahebey der Dichtigkeit dieſer Schichten proportional iſt, welche, wie man weiß, von der Mitte gegen den Umfang zu veränderlich iſt. Hieraus ſchloß er, daß bey einerley Holzarten der Widerſtand ſich verhält, wie die Schwere, welches auch neue Verſuche hinlänglich beſtätigen.

*) Mémoires de l'academie des ſciences.

In der Folge bemerkt er, daß der Grad der Trockenheit des Holzes den Widerſtand beträchtlich verändert. Da es aber ſehr ſchwer iſt, dieſe Trockenheit mit hinlänglicher Genauigkeit zu erforſchen, ſo nahm er, um eine feſte Grenze zu haben, kleine Stücke von noch grünenden Bäumen, welche erſt denſelben Tag gehauen waren.

Aber ungeachtet aller dieſer Sorgfalt genügten ihm ſeine erſten Verſuche mit bloßen Stäben doch noch wenig. Er nahm alſo große Hölzer von ſieben bis achtzehn Fuß Länge und fünf bis acht Zoll Dicke im Quadrat. Dieſe letztern Verſuche machen den intereſſanteſten Theil ſeiner Arbeit aus. Er hat hierüber mehrere Tabellen verfertigt, worin er das Gewicht eines jeden Stückes, die Laſt, welche es getragen, ſo wie auch die Krümme, welche es in dem Augenblick, wo es krachte, angenommen hatte, bemerkt. Ferner hat er auch eben dieſe Krümme für den Augenblick des Bruches angegeben.

Man ſieht alſo, daß Buffon durch dieſe Beobachtungen auf den Weg geleitet wurde, die abſolute Elaſticität zu unterſuchen, und es iſt auch zu vermuthen, daß er dieſe Verſuche zu deren Beſtimmung gebraucht haben würde, wenn er mit der Theorie der elaſtiſchen Linie vertrauter geweſen wäre.

Da Buffon den Widerſtand der feſten Körper mehr wie ein Naturforſcher, als ein Geometer unterſuchte; ſo wollte er auch wiſſen, was von einem von Vitruv *) ſchon angegebenen und in manchen Theilen Englands bis jetzt noch gebräuchlichem Verfahren, die Stärke des Holzes zu vermehren, zu halten ſey. Dieſes Verfahren beſteht darin, die Bäume zu einer bequemen Jahrszeit abzuhauen, nachdem man ſie zuvor auf den Stamm hat dürre werden laſſen, es ſey nun, daß man ſie zuvor ganz bis an den Gipfel abſchälte, oder ihnen auch nur in einiger Entfernung von der Erde rundum einen Theil ihrer Rinde raubte. Er ließ alſo mehrere Bäume abſchälen, und wie er ſah, daß ſie kein Laub mehr trieben, ließ er ſie niederhauen, und zu den Verſuchen zubereiten, und gab ihnen dieſelben Dimenſionen wie mehreren andern Stücken, welche er aus Bäumen verfertigen ließ, die, als jene Bäume entſchält wurden, abgehauen und mit ihrer Rinde abgeſtorben waren. Er machte mit beyderley Hölzern einerley Verſuche, und fand, daß das auf dem Stamme abgeſtorbene Holz nicht blos feſter war, wie dasjenige, welches erſt nach dem Fällen abſtarb; ſondern es leiſtete auch um ein Viertheil größern Widerſtand, wie dieſes. Wegen der Urſache dieſes größern Gewichtes und

---

*) Vitruv Buch II, Kap. IX.

der größern Stärke, iſt er mit Vitruv einerley Meinung. Er ſagt nämlich, wenn ein Baum ſeiner Rinde beraubt wird; ſo hört der Umlauf der verſchiedenen Subſtanzen auf, die dazu beſtimmt waren, die äußere Lage des Splints zu bilden. Sie müſſen ſich alſo an den verſchiedenen Gefäßen, worin ſie ſich befinden, fixiren, ſo daß nach dieſer Meinung der Baum das an Stärke und Dichtigkeit gewinnt, was er an Wachsthum verliert.

Aber nicht bloß über den Widerſtand des Holzes ſtellte Buffon bis dahin die größten Verſuche an; ſondern es war ihm auch vorbehalten, den Widerſtand des Eiſens durch ähnliche Verſuche zu beſtimmen. Nachdem er Stangen achtzehn Linien dick, und Drath eine Linie dick, unterſucht hatte, *) fand er, daß das Eiſen von wenigerer Dicke zäher, als das von größeren Dimenſionen iſt, weil dieſes letztere, indem es weniger bearbeitet iſt, nicht denſelben Grad der Dichtigkeit erlangt hat, woraus die größere Cohärenz entſteht.

Seit den Verſuchen dieſes franzöſiſchen Naturforſchers iſt über dieſen Gegenſtand nichts erſchienen, außer die Reſultate von einigen Verſuchen, welche in einem Memoire des berühmten Perronet, ſur les pieux et pilotis **) vorkommen. Sie wurden angeſtellt, um das Verhältniß des Longitudinal-Widerſtandes verſchiedener zu hydrauliſchen Bauwerken angewendeten Holzarten zu erfahren.

Dieß ſind die Arbeiten der Geometer und Phyſiker über den Widerſtand der Körper. Durch mehrere Umſtände wurden wir veranlaßt, dieſe Unterſuchung wieder vorzunehmen. Wir werden jetzt ſuchen, auf einem Wege, wo ein Leibnitz, Bernoulli, Euler und Lagrange unſere Führer ſind, eine vollſtändige Theorie hierüber zu liefern.

Da wir die bisherigen Erfindungen auseinander geſetzt haben; ſo bleibt uns jetzt nichts übrig, als noch mit wenigen Worten anzugeben, was wir hinzugefügt zu haben glauben, und welche Ordnung wir in nachſtehender Abhandlung beobachtet haben.

Die von Varignon 1702 gegebene Formel über den Widerſtand feſter Körper iſt nur bey ununterbrochenen Brechungsebenen leicht anzuwenden. Die unſrige iſt für jede

---

*) Oeuvres complettes de Buffon, Tom. VII.

**) Oeuvres de Perronet, in Fol. Tom. I.

Brechungsebene gleich leicht zu gebrauchen, ſelbſt wenn die Fibern, woraus der Körper beſteht, nicht einmal homogen ſind. Hierauf haben wir ſowohl nach Galilei's, als nach Leibnitzens Hypotheſe den Widerſtand für ſolche Körper berechnet, welche am meiſten gebraucht werden.

Der Widerſtand feſter Körper, welche an beyden Enden unterſtützt ſind, war ſchon berechnet; aber man hatte den Fall noch nicht betrachtet, wenn ſie an beyden Enden eingeklemmt ſind. Wir haben ihn dem Calcul unterworfen, und Reſultate gefunden, die mit der Erfahrung vollkommen übereinkommen.

Die erſte Abtheilung ſchließen wir mit einer ausführlichen Abhandlung über die elaſtiſchen Linien, welche uns zu der Formel für den longitudinalen Widerſtand feſter Körper führen, die parallel mit der Länge ihrer Fibern zuſammen gedrückt werden.

Die zweyte Abtheilung enthält eine vollſtändige Theorie von den feſten Körpern, die überall einen gleichen Widerſtand leiſten. Wir haben zuerſt angenommen, daß ſie ſeitwärts belaſtet ſeyn, und geben dafür eine allgemeine Gleichung, es mag nun ihr eigenes Gewicht oder nicht dabey in Betracht gezogen werden. Wir zeigen ferner, daß die Anzahl dieſer feſter Körper nicht blos auf ſolche beſchränkt iſt, welche nach gewiſſen Geſetzen der Continuität, die eines analytiſchen Ausdrucks fähig ſind, erzeugt werden; ſondern daß ſich noch unendlich viel andere Körper denken laſſen, deren Brechungsebenen kein beſtimmtes Verhältniß zu einander haben würden.

Ferner haben wir eine allgemeine Gleichung für ſolche feſte Körper gegeben, die überall einen gleichen Widerſtand leiſten, wenn ſie nach der Richtung ihrer Fibern gezogen werden. Hierdurch kommen wir leicht auf das Geſetz der Abnahme einer ſchweren Kette.

Endlich gehen wir zu den Körpern über, welche parallel mit ihrer Länge zuſammen gedrückt werden. Wir haben die Form beſtimmt, welche ſie bekommen müſſen, um überall gleichen Widerſtand zu leiſten, wenn man dabey auf ihr eigenes Gewicht Rückſicht nimmt. Dieſe Form iſt bey Säulen anwendbar. Merkwürdig iſt hierbey, daß dieſe Form unverändert bleibt, der Körper mag fiberartig ſeyn, wie das Holz, oder wie die Steine aus kleinen, gleichſam zuſammen gekitteten Theilchen, oder auch aus adhärirenden Schichten beſtehen

Eine Betrachtung über die allgemeine Gleichung der feſten Körper von ungleichem Widerſtande führt uns auf die Methode, für jeden Körper von ungleichem Widerſtande den Punct des kleinſten und größten Widerſtandes zu beſtimmen. Mit einigen Entwickelungen über dieſe Methode ſchließt ſich die zweyte Abtheilung.

In der dritten Abtheilung erſtatten wir einen ausführlichen Bericht von den mit Eichen- und Fichtenholz unternommenen Verſuchen, welches wir ſowohl parallel als perpendikulär mit ſeiner Länge beſchwert haben.

Bey dem in der Richtung der Fibern beſchwerten Holze ergeben ſich die verſchiedenſten Erſcheinungen, worunter die doppelte Krümmung, deren Möglichkeit die Theorie ſchon gezeigt hat, diejenige iſt, welche wir am öfterſten bemerkt haben.

Vorzüglich haben wir den Widerſtand zu unterſuchen getrachtet, welchen dieſe Körper einer perpendikulär auf ihre Länge angebrachten Kraft leichſten. Der Hauptzweck hierbey war, nach Eulers Anleitung, die abſolute Elaſticität kennen zu lernen. Dieß geſchah, nicht bloß weil dieſer Ausdruck ein weſentliches Element für die Laſt iſt, welche, indem ſie in der Richtung der Fibern wirkt, eine Biegung hervorbringt; ſondern auch deswegen, weil dieſer Ausdruck zugleich das Verhältniß der größten Ordinate der Krümmung zu dem Gewichte anzeigt, wenn die Körper ſeitwärts belaſtet ſind.

In der Theorie wurde der von der Longitudinal-Cohärenz der Fibern herrührende Widerſtand auſſer Acht gelaſſen. Es iſt aber klar, daß dieſe Cohärenz die Biegung viel ſchwieriger machen muß. Schon gleich bey dem erſten Verſuche nahmen wir wahr, daß die abſolute Elaſticität (welche nach der über die Organiſation fiberartiger Körper von den Geometern aufgeſtellten Hypotheſe, bloß von den Dimenſionen der Brechungsebene abhängen ſoll) zugleich mit von der Länge der integrirenden Fibern abhängig iſt. Wir haben deshalb die Function von dieſer Länge unterſucht, welche die Longitudinal-Cohärenz der verſchiedenen Holzarten angiebt, um darnach die abſolute ſpecifiſche Elaſticität zu beſtimmen.

Da wir unſere Verſuche mehrere Jahre fortgeſetzt haben; ſo hatten wir Gelegenheit, die Veränderungen zu bemerken, welche die abſolute Elaſticität aller organiſchen Körper, vorzüglich aber die vegetabiliſchen, von den verſchiedenen Beſchaffenheiten der Luft, erleiden, je nachdem ſie trockener oder feuchter, wärmer oder kälter iſt. Dieſe Bemerkung eröffnet

ein neues Feld zu Verſuchen, welche aber, wenn genaue Folgerungen daraus hergeleitet werden ſollten, unglücklicherweiſe mit ungemein vielen Schwierigkeiten verbunden ſeyn würden.

Die bisher erwähnten drey Abtheilungen handeln von dem Widerſtande der feſten Körper, wenn derſelbe mit der Kraft, die ihn zu überwinden trachtet, im Gleichgewichte iſt. Man hat aber auch bemerkt, daß dieſer Widerſtand geringer wird, wenn die Kraft zu wirken fortfährt. Es blieb uns noch übrig, die Geſetze der Dynamik hierauf anzuwenden.

Nimmt man die Körper als vollkommen elaſtiſch an, ſo muß eine ſehr kleine durch irgend ein Gewicht erzeugte Biegung in einem faſt untheilbaren Augenblick erfolgen. Wenn zu einer ſolchen Biegung mehr Zeit erfordert wird, ſo rührt das daher, daß die meiſten Körper nur unvollkommen elaſtiſch ſind, und dieſe Unvollkommenheit beſteht darin, daß die Elaſticität in jedem Augenblick einen Theil ihrer Energie verliert. Nach dieſer Vorausſetzung erhalten wir ein Verhältniß zwiſchen den größten Ordinaten der Krümmung und der Dauer der Biegung. Die Schwierigkeit beſteht jetzt darin, den Verluſt der Elaſticität genau anzugeben, wozu eine lange Reihe von Verſuchen nöthig wäre, womit wir uns noch nicht beſchäftigt haben.

Um die einzelnen Reſultate unſerer Verſuche deſto beſſer überſehen zu können, haben wir ſie am Ende dieſes Werkes tabellariſch dargeſtellt.

Die vier erſten Tabellen enthalten bloß unmittelbare Beobachtungen; die folgenden ſtellen die daraus gezogenen Folgerungen dar. Die letzte iſt nach Buffons Verſuchen verfertigt, um die größte Verlängerung zu beſtimmen, welche die Fibern des Eichenholzes annehmen können, ehe ſie brechen.

Die bisher beſchriebenen Arbeiten unternahmen wir bloß, um nützlich zu ſeyn, indem wir von dem großen Vortheil überzeugt ſind, welcher durch die Anwendung der Wiſſenſchaften auf die Künſte zu gewinnen iſt.

# Inhalt.

## Erſter Abſchnitt.

## Von dem Widerſtande feſter Körper.

Allgemeine Formeln von dem Widerſtande feſter Körper. Anwendung dieſer Formeln, auf die von Galilei, Leibnitz und Mariotte aufgeſtellten Hypotheſen.

§. 1. Unterſuchung wegen eines allgemeinen Ausdrucks für den abſoluten Widerſtand der feſten Körper.

§. 2. Unterſuchung über einen allgemeinen Ausdruck des relativen Widerſtandes.

§. 3. Wie man zu der von Varignon 1702 gegebenen Formel für den Widerſtand der feſten Körper gelangt.

§. 4. Verhältniß des abſoluten Widerſtandes zu dem relativen Widerſtand der feſten Körper.

§. 5. Wie die Formel für den relativen Widerſtand nach der Hypotheſe des Galilei wird.

§. 6. Es wird der beſondere Fall betrachtet, daß der Körper aus gleichartigen Theilen beſteht.

§. 7. Was aus derſelben Formel nach der Hypotheſe Mariotte's und Leibnitzens wird.

§. 8. Was aus dieſer Formel wird, wenn die widerſtehenden Fibern, und die Coordinaten der Brechungsebene einerley Anfang haben.

§. 9. Die bey dieſen Formeln nothwendig werdenden Verſuche können nur durch Verſuche ausgemittelt werden.

§. 10. Welches diejenigen Körper ſind, bey denen die Galileiſche Hypotheſe angewandt werden muß.

§. 11. Bey welchen Körpern die Leibnitziſche Hypotheſe anwendbar iſt.

§. 12. Jacob Bernoulli's Bemerkungen über die Fibern im Augenblicke des Brechens.

§. 13. Welches das Product der Spannungen der widerſtehenden Fibern nach Galilei's Theorie iſt.

§. 14. Wie man die Spannungen der Fibern nach Leibnitzens Syſtem zu betrachten hat.

## Unterſuchungen über den Widerſtand verſchiedener Brechungsebenen nach Galilei's Hypotheſe.

§. 15. Von dem Widerſtande einer rectangulären Brechungsebene, deren eine Seite die Umdrehungsachſe iſt.

§. 17. Regel, um den relativen Widerſtand prismatiſcher Körper zu finden.

§. 21. Formel für den Widerſtand einer triangulären Brechungsebene, deren eine Seite die Umdrehungsachſe iſt.

§. 22. Widerſtand derſelben Brechungsebene, wenn die Umdrehungsachſe durch ihre Spitze geht.

§. 23. Aehnliche Brechungsebenen widerſtehen im Verhältniſſe des Cubus ihrer gleichnahmigen Seiten.

§. 25. Widerſtand eines Viertelzirkels um ſeinen Halbmeſſer.

§. 27. Verhältniß zwiſchen dem Widerſtande des Zirkels und des darum beſchriebenen Quadrats.

§. 28. Von dem Widerſtande eines halben Zirkels um ſeine Tangente.

§. 29. Allgemeiner Ausdruck für den Widerſtand eines hohlen Cylinders.

§. 30. In welchem Falle der Widerſtand einer Röhre ein Maximum wird, angenommen, daß die Durchmeſſer des innern und äußern Zirkels gleich bleiben.

§. 32. Wie groß dieſer Widerſtand iſt, wenn der innere und äußere Zirkel concentriſch ſind.

§. 33. Verhältniß des Widerſtandes einer Röhre zu dem Widerſtande eines Cylinders von gleichem Volumen.

§. 34. Einen Cylinder zu finden, deſſen Widerſtand zu dem Widerſtande einer Röhre ein gegebenes Verhältniß habe.

## Anwendung der von Leibnitzen und Mariotte aufgeſtellten Hypotheſe auf einige beſondere Fälle.

§. 35. Widerſtand einer rechtwinkeligen Brechungsebene.

§. 36. Regel, um den Widerſtand feſter prismatiſcher Körper zu berechnen, die denen §. 17 analog ſind.

§. 37. Vergleichung der nach Galilei's und nach Leibnitzens Hypotheſe erhaltenen Reſultate.

§. 38. Widerſtand eines Dreyecks um die eine ſeiner Seiten.

§. 39. Wenn die Umdrehungsachſe durch die Spitze geht.

§. 41. Unterſuchung über den Widerſtand einer kreisförmigen Brechungsebene um ihre Tangente.

§. 42. Widerſtand eines halben Zirkels um ſeinen Durchmeſſer und um ſeine Tangente.

§. 43. Allgemeiner Ausdruck für den Widerſtand der Röhren.

§. 45. Wie der Widerſtand wird, wenn die Zirkel concentriſch ſind.

§. 47. Einen Cylinder zu finden, deſſen Widerſtand zu dem Widerſtande einer Röhre ein gegebenes Verhältniß hat.

§. 48. Wenn der Cylinder und die Röhren gleiche Maſſen haben.

§. 49. Die bisherigen Formeln können dazu dienen, den Widerſtand heterogener Körper zu beſtimmen.

Von dem Widerſtande der feſten Körper, wenn die Kraft, welche ſie zu zerbrechen ſtrebt, an ihren äußerſten Enden wirkt. Beſtimmung des Widerſtandes, wenn die Körper an mehreren Punkten unterſtützt ſind, und wenn zu gleicher Zeit an mehreren Punkten ihrer Länge Brüche erfolgen müſſen.

§. 50. Wie man feſte, zwiſchen ihren beyden Enden unterſtützte und an beyden Seiten des Unterſtützungspunktes beſchwerte Körper anzuſehen habe.

§. 53. Beſtimmung des Druckes, welchen der Unterſtützungspunkt leidet.

§. 54. Die Bedingungen des Gleichgewichtes ſind dieſelben, der Körper mag in der Mitte unterſtützt, und an ſeinen beyden Enden beſchwert, oder an den beyden Enden unterſtützt und in der Mitte belaſtet ſeyn.

§. 56. Von dem Widerſtande der feſten Körper, wenn ſie an ihren Enden eingeklemmt ſind.

§. 57. Vorſtehende Formel für prismatiſche Körper umgeändert.

§. 58. Ein an ſeinen Enden eingeklemmter Körper muß bey ſeinen Unterlagen brechen.

§. 59. Wenn der feſte Körper an dem einen Ende eingeklemmt, an dem andern Ende aber frey unterſtützt iſt.

§. 60. Unterſuchung über den Widerſtand feſter, prismatiſcher Körper, welche auf mehreren gleich weit von einander entfernten Unterlagen ruhen.

§. 61. Verhältniß des Widerſtandes zweyer feſter Körper von gleichen Dimenſionen, die aber durch eine unter ſich verſchiedene Anzahl Unterlagen unterſtützt ſind.

§. 62. In welchem Falle die Anzahl der Unterlagen unendlich iſt.

§. 63. Verhältniß des Widerſtandes derſelben feſten Körper als eine Function der Brechungspunkte.

Von dem Widerſtande ähnlicher feſter Körper, und von ſolchen feſten Körpern, die der Wirkung ihres eigenen Gewichtes widerſtehen.

§. 64. Worin die Hypotheſen Galilei's und Leibnitzens übereinſtimmen.

§. 66. Verhältniß des Widerſtandes zweyer ähnlichen Körper.

§. 67. Verhältniß der Längen zweyer feſten Körper mit ähnlichen Brechungsebenen, wenn ſie den Wirkungen ihres eigenen Gewichtes widerſtehen können.

§. 68. Ausdruck für die Länge eines feſten prismatiſchen Körpers, wenn er ſeinem eigenen Gewichte widerſtehen ſoll.

Von dem Widerſtande feſter prismatiſcher Körper, wenn die brechende Kraft unter einem ſchiefen Winkel auf die Länge der Fibern wirkt.

§. 69. Verhältniß des Widerſtandes ein und deſſelben Körpers, wenn er unter einem auf die Fibern ſchiefen oder ſenkrechten Winkel belaſtet iſt.

§. 70. Wie man auf das eigene Gewicht eines feſten Körpers in dem Ausdrucke für den Widerſtand Rückſicht nehmen muß.

§. 72. In welchem Falle die vorſtehende Formel nicht hinreicht.

§. 73. Was wir unter abſolut negativem Widerſtand verſtehen.

Ueber die elaſtiſchen krummen Linien. Allgemeine Formel von dem abſolut negativen Widerſtande der feſten Körper.

§. 77. Allgemeinere Gleichung für dieſe krummen Linien.

§. 78. Werth der Größen P, c, f, wenn die Figur der elaſtiſchen Linien gegeben iſt.

§. 79. Werthe verſchiedener Kräfte, welche einen Theil der elaſtiſchen Linie in eine gegebene krumme Linie erhalten ſoll.

§. 80. Beſtimmung der Tangente von dem Anfangspunkte der Coordinate an gerechnet.

§. 81. Was aus der allgemeinen Gleichung für den Fall wird, wenn die Kraft an dieſem Anfangspunkte angebracht wird.

§. 82. Unter welchen Umſtänden die elaſtiſche Curve eine gerade Linie wird.

§. 83. Wodurch die verſchiedenen Arten der elaſtiſchen Krümmungen beſtimmt werden.

§. 84. Figur und Zug dieſer Curve aus ihrer allgemeinen Gleichung abgeleitet.

§. 85. Dieſe krumme Linie hat eine unendliche Anzahl paralleler und gleichweit von einander entfernter Halbmeſſer.

§. 87. An welchen Punkten ihrer Krümmung ein Minimum oder ein Maximum iſt.

§. 89. Obgleich die größte Abſciſſe bekannt iſt, ſo kann doch die correſpondirende Ordinate nicht geometriſch beſtimmt werden.

§. 90. Man kann den Werth durch Näherung, vermittelſt des Verhältniſſes des Umfanges zum Durchmeſſer, finden.

§. 92. Bezieht ſich auf die erſte Art der elaſtiſchen Linien.

§. 93. Gewicht, bey welchem die Biegung nach dieſer Vorausſetzung ihren Anfang nimmt.

§. 94. Anwendung auf feſte Körper, die auf ihrer Spitze belaſtet ſind.

§. 95. Regel zur Berechnung des abſolut negativen Widerſtandes feſter Körper.

Phyſikaliſche Betrachtungen über die Biegung der parallel mit ihrer Länge beladenen Körper. Unmittelbare Beſtimmung der Krümmung, die ſie anzunehmen ſtreben.

§. 96. Wie man die Biegung der parallel mit ihren Fibern belaſteten Körper betrachten kann.

§. 99. Wie ſie für den erſten Grad der Biegung ungeändert wird.

§. 101. Ausdruck für das Gewicht, bey welchem die Biegung ihren Anfang nimmt.

§. 102. Eine allgemeinere Gleichung der krummen Linie, und Beſtimmung ihrer Biegungen.

§. 104. Beſtimmung der Punkte in der Achſe, die den größten Ordinaten correſpondiren.

§. 105. Ausdruck für die größten Ordinaten der krummen Linien.

§. 106. Verhältniß der Laſten, welche die Biegung nach den beyden Richtungen der Behauung hervorbringen.

§. 108. Für den beſondern Fall, wenn der feſte Körper rechtwinkelig iſt.

Von dem abſolut negativen Widerſtande der durch ihr eigenes Gewicht belaſteten feſten Körper.

§. 110. Das Gewicht der an ihren Enden beſchwerten feſten Körper iſt in dem Ausdrucke für ihren Widerſtand außer Acht zu laſſen.
§. 112. Weſentliche Bedingung der Frage, wenn auf dieſes Gewicht geachtet werden ſoll.
§. 113. Paradoxe Behauptung, zu welcher Euler Anfangs gelangte.
§. 115. Beſchaffenheit der Frage.
§. 116. Auf einen ganz einfachen Fall reducirt.
§. 118. Gleichung, welche die Länge der beyden Theile des Syſtems gibt.
§. 119. Anwendung für den Fall, wo der gegebene feſte Körper von einer gleichförmigen Elaſticität iſt.
§. 120. Gleichung, welche die Auflöſung der Frage giebt.
§. 121. Bedingungen, wornach ſie integrirt werden muß.
§. 122. Unterſuchung des Falles, wo die horizontalen Kräfte Null ſind.
§. 123. Formel, welche die Auflöſung der Aufgabe enthält.
§. 124. Beſtimmung der geſuchten Höhe.

## Zweyter Abſchnitt.

## Von ſolchen feſten Körpern, die einen gleichen Widerſtand leiſten.

### Definition von ſolchen feſten Körpern, die einen gleichen Widerſtand leiſten. Ihre allgemeine Gleichung. Betrachtungen, welche davon abhängen.

§. 125. Erzeugung der feſten Körper, welche wir jetzt betrachten wollen.
§. 126. Definition von ſolchen feſten Körpern, die einen gleichen Widerſtand leiſten. Ihre allgemeine Gleichung.
§. 128. Die Zahl dieſer Körper iſt unendlich.
§. 129. Eigenſchaften, welche ſie weſentlich charakteriſiren.
§. 130. Ihre allgemeine Gleichung iſt zugleich eine Gleichung für krumme Oberflächen.
§. 132. Es muß eine große Anzahl derſelben in der Natur exiſtiren.
§. 133. Beſtimmung der krummen Linie, nach welcher ſie anfangen ſich zu biegen.

### Von den feſten Körpern von gleichem Widerſtande, wenn das auf ſie wirkende Gewicht eine unveränderliche Größe iſt.

§. 134. Wie die allgemeine Formel abgeändert wird, wenn der widerſtehende Körper mit einem unveränderlichen Gewichte beſchwert iſt.
§. 135. Wie die beyden Glieder dieſer Gleichung homogen gemacht werden.
§. 136. Anwendung von dieſer Formel.
§. 138. Varignons drey Vorausſetzungen.
§. 139. Feſte Körper von gleichem Widerſtande an ihren Enden unterſtützt.
§. 140. Drey andere Vorausſetzungen von Varignon, welche dieſem Falle analog ſind.
§. 142. Wichtige Bemerkung für die Lage der feſten Körper von gleichem Widerſtande in Rückſicht der Kraft, welche ſie zu zerbrechen trachtet.

§. 143. Die Unterſtützungen der feſten Körper von gleichem Widerſtande ſind wie gerade Linien, oder auch wie Punkte anzuſehen.

Von den feſten Körpern von gleichem Widerſtande, wenn die Laſt eine Function des Hebelarmes iſt, woran ſie wirkt.

§. 144. Die Elementar-Theile der Laſt können durch die Ordinaten irgend einer krummen Linie dargeſtellt werden.
§. 145. Unterſuchung über die allgemeine Gleichung dieſer feſten Körper.
§. 146. Formel, welche beyde Fälle enthält.
§. 147. Was aus dieſer Formel für den erſten Fall wird, wenn die Linie TRV gerade iſt.
§. 148. Was nach derſelben Vorausſetzung aus dem zweyten Fall wird.
§. 149. Formel, welche beyde Fälle mittelſt doppelter Zeichen enthält.
§. 150. Unterſuchung über einzelne in dieſer Formel begriffene Fälle.
§. 154. Reſultate aus vorſtehenden Formeln.
§. 155. Dieſelben Gleichungen dienen auch dazu, die Figur der an ihren Enden unterſtützten feſten Körper von gleichem Widerſtande zu beſtimmen.

Von den feſten Körpern von gleichem Widerſtande, wenn dabey auf die Wirkung ihres eigenen Gewichtes Rückſicht genommen wird.

§. 156. Unterſuchung über die allgemeine Gleichung für ſolche feſte Körper.
§. 157. Dieſe Gleichung iſt nur ein einzelner Fall der §. 146. gefundenen Gleichung.
§. 158. Allgemeine Formel für die Breitenkrümmung des feſten Körpers.
§. 159. Allgemeine Gleichung für die Höhenkrümmung.
§. 161. Was aus der Formel §. 156 wird, wenn die Schwere des feſten Körpers unveränderlich iſt.
§. 162. Allgemeine Gleichung für ſchwere und feſte Körper von gleichem Widerſtande, die außer ihrem eigenen Gewichte noch von einer fremden Maſſe belaſtet ſind.
§. 163. Wenn die Höhenkrümmung gegeben iſt, ſo läßt ſich die Breitenkrümmung beſtimmen.
§. 165. Wenn die Breitenkrümmung gegeben iſt, ſo iſt die Höhenkrümmung in einigen Fällen zu beſtimmen.
§. 169. Feſte Körper von gleichem Gewichte, die blos der Wirkung ihres eigenen Gewichtes widerſtehen, kommen bey Bauwerken nicht oft vor.
§. 170. Um einen feſten Körper von gleichem Widerſtande zu beſtimmen, iſt es genug, das Verhältniß der Ordinaten der erzeugenden krummen Linie zu kennen.
§. 171. Von den feſten Körpern von gleichem Widerſtande, deren Maſſe ein Größtes oder ein Kleinſtes iſt.

Von den feſten Körpern von gleichem abſolut poſitiven Widerſtande. Geſetz der Abnahme der Elemente einer ſchweren Kette.

§. 172. Der abſolut poſitive Widerſtand iſt unabhängig von der Ausdehnbarkeit der Fibern.
§. 173. Allgemeine Gleichung für ſolche Körper, welche ihrem eigenen Gewichte widerſtehen.
§. 174. Was aus dieſer Gleichung wird, wenn z oder y unveränderlich ſind.

§. 175. Wenn die Brechungsebenen ähnlich ſind.
§. 176. Allgemeine Gleichung für ſolche feſte Körper, wenn ſie ein fremdes Gewicht erhalten müſſen.
§. 177. Beyſpiel von dem Nutzen dieſer Theorie in der Anwendung.

Von den feſten Körpern von gleichem abſolut negativen Widerſtande. Anwendung auf die Figur der Säulen.

§. 178. Vortheilhafteſte Figur der als nicht ſchwer angenommenen aber an ihren Enden beſchwerten feſten Körper.
§. 179. Gleichung für feſte Körper von gleichem abſolut negativen Widerſtande, wenn ſie blos durch ihr eigenes Gewicht belaſtet ſind.
§. 181. Wie dieſe Gleichung für einige beſondere Fälle ſich umändert.
§. 182. Wie das Bisherige auf die Figur der Säulen anzuwenden iſt.

Von den Puncten des kleinſten und größten Widerſtandes der feſten Körper.

§. 183. Definition von den feſten Körpern des kleinſten und größten Widerſtandes.
§. 184. Was man unter dem Brechungspunkt und dem Punkt des größten Widerſtandes verſteht.
§. 185. Allgemeine Formel zur Beſtimmung dieſer Punkte.
§. 186. Einige Anwendung von dieſen Formeln.
§. 188. Formel für die Punkte des kleinſten oder größten abſoluten Widerſtandes.
§. 189. Die bisher entwickelte Theorie gilt auch für Körper, deren Durchſchnitte nicht rechtwinkelig ſind.

Dritter Abſchnitt.

Erfahrungen über den Widerſtand und die Elaſticität des Eichen- und Fichtenholzes.

Allgemeine Betrachtungen. Von der Krümmung, welche perpendikulär auf ihre Länge beſchwerte feſte Körper bey dem erſten Grade ihrer Biegung annehmen.

§. 190. Nothwendigkeit der Verſuche über den Widerſtand der feſten Körper.
§. 192. Beſtimmung desjenigen, worauf man vorzüglich ſein Augenmerk richten muß.
§. 193. Auf welche Weiſe man den genauen Werth der abſoluten Elaſticität würde erfahren können.
§. 194. Hierzu dienende Bemerkung.
§. 195. Der Ausdruck E k k kommt ſowohl der Steifheit, als der Elaſticität zu.
§. 196. Gleichung für die Elaſticität, wenn die Krümmung ſehr klein iſt.
§. 198. Verhältniß der Laſten zu den größten Ordinaten der Krümmungen.
§. 199. Werth von E k k wenn der feſte Körper an ſeinen Enden unterſtützt iſt.
§. 200. Die Elaſticität und Steifheit der Körper iſt nicht gleichförmig in allen ihren Punkten.
§. 201. Wie man den Widerſtand beſtimmt, wenn ſie eine gewiſſe Potenz der Länge des Körpers iſt.
§. 202. Der beſondere Fall, wenn der Exponent dieſer Potenz die Einheit iſt.

## Beſchreibung der Zurüſtung.


§. 203. Vorſichtsmaßregeln, um die Zurüſtung unbeweglich zu machen.

§. 204. Mittel, welche angewandt wurden, die zu den Verſuchen dienenden Hölzer vertikal zu erhalten.

§. 205. Wie die Neigung des Hebels gemeſſen wurde.

§. 206. Das Manöver.

§. 207. Veränderte Zurüſtung zu den Verſuchen über den relativen Widerſtand.

§. 208. Verzeichnung der von dem Holze bey den Verſuchen angenommenen krummen Linien.


## Berechnung über die Gewalt, welcher die zu den Verſuchen gewählten Körper widerſtehen mußten.


§. 209. Druck auf die zu den Verſuchen gewählten Körper.

§. 210. Beſtimmung des Gewichtes, welches in die Wagſchale geſetzt, denſelben Druck hervorbringen würde.

§. 211. Formel, welche den Druck auf das Holz giebt, wenn man dabey auf die Neigung des Hebels achtet.

§. 212. Wie die Zurüſtung zu den Verſuchen über den relativen Widerſtand abgeändert war.


## Ausführliche Darſtellung der Verſuche, welche mit Eichenholz angeſtellt wurden, das an ſeinen Enden belaſtet war.

### Erſte Tabelle.


§. 214. Einrichtung der erſten Tabelle.

§. 215. Dieſes Holz krümmte ſich nach beyden Dimenſionen.

§. 216. Wenn die Fibern ſchief ſind, welchen Einfluß dieß hat.

§. 217. Vertikale Bewegung des Biegungspunktes.

§. 218. Nothwendigkeit, verſchiedene Krümmungen des zum Verſuche gewählten Körpers zu verzeichnen.

§. 219. Neue Beobachtungen zu der §. 217. erwähnten.

§. 220. Die innern Fibern brechen, ohne daß man an dem Umfange des Stückes einen Bruch bemerken kann.

§. 221. Es ſtellte ſich nicht ganz wieder her.

§. 222. Die Reſtitution erfolgt nicht immer auf dieſelbe Art, wie die Biegung.

§. 223. Die beyden Krümmungen nach den beyden Ebenen der Behauung ſind unabhängig von einander.

§. 225. Dieſes Holz bog ſich Anfangs nach ſeiner größten Dimenſion.

§. 226. Abnahme der einen Krümmung, während die andere größer wurde.

§. 228. Umſtände, welche bey dem Bruche Statt hatten.

§. 229. Die Longitudinal-Adhäſion der Fibern iſt eine der Urſachen dieſer Erſcheinung.

§. 230. Schwierigkeiten, welche aus dem überſpähnigen Holze entſtehen.

§. 231. Die größten Ordinaten der Krümmungen in den beyden Ebenen correſpondiren nicht mit einem und demſelben Punkte in der vertikalen Linie.

§. 232. Bewegung dieſer größten Ordinaten gegen einander.
§. 233. Dieſes Holz reſtituirte ſich vollkommen.
§. 234. Dieſes Holz wird während ſeiner Biegung zuſammengedrückt und ſpaltet.
§. 236. Bewegung der größten Ordinate.
§. 238. Vermöge der Zuſammenpreſſung wird dieſes Holz dicker.
§. 239. Dieſes Holz nahm nur nach der einen Seite ſeine gerade Lage wieder an.
§. 241. Fehler in der Organiſation, welche eine Quetſchung des Holzes veranlaßte.
§. 242. Erſcheinung, welche derjenigen ähnlich iſt, die wir bey No. III. beobachtet haben.
§. 243. Oscillation der größten Ordinate.
§. 245. Wie die größte Ordinate unverändert bleiben, und die Krümmung doch zunehmen kann.
§. 246. Einfluß der Temperatur der Atmosphäre auf die Biegung.
§. 247. Oscillirende Bewegung der größten Ordinate.
§. 248. Zuſammenpreſſung dieſes Holzes nach ſeiner Länge.
§. 250. Die Krümmung bekommt einen Biegungspunkt.
§. 251. Die krumme Fläche iſt den größten Ordinaten proportional.
§. 252. Doppelte Biegung; Oscillation der größten Ordinate.
§. 253. Unterſchied zwiſchen der Stärke dieſes Holzes und des Holzes No. VIII. von gleichen Dimenſionen.
§. 254. Anfang und Zunahme einer doppelten Krümmung.
§. 256. Zufall, welcher den Bruch des Stückes veranlaßt.
§. 258. Die größte Ordinate für die Krümmung der Dicke geht hinunter.
§. 259. Die größte Ordinate für die Breitenkrümmung blieb unverändert.
§. 260. Das Holz ſpaltet nach der Länge.
§. 261. Biegungspunkt, beobachtet am Ende des Verſuches.
§. 263. Einfluß der längeren Dauer der Belaſtung auf die Biegung.
§. 265. Verkürzung und Zuſammenpreſſung der Fibern unter der Laſt.

Ausführliche Beſchreibung der angeſtellten Verſuche, um den relativen Widerſtand und die abſolute Elaſticität zu beſtimmen.

§. 266. Einrichtung der zweyten, dritten und vierten Tabelle.

Zweyte Tabelle.

§. 267. Verſuche über den relativen Widerſtand ſolcher Stücke, deren Widerſtand parallel mit ihren Fibern man ſchon unterſucht hat.
§. 268. Unveränderlicher Ausdruck der abſoluten Elaſticität.
§. 269. Dieſe Elaſticität iſt eine Function der Länge des zu den Verſuchen gewählten Körpers.
§. 270. Der Ausdruck für die Elaſticität wird kleiner, wenn die Krümmung größer wird.
§. 273. Aehnliche Beobachtung, wie §. 270.
§. 277. Die Zeit, während welcher ein Gewicht auf den Körper wirkt, hat Einfluß auf den Ausdruck für die Elaſticität.
§. 278. Uebereinſtimmung der Theorie mit der Erfahrung.

Dritte Tabelle.

§. 279. Objekt der in der dritten Tabelle aufgezählten Verſuche.

§. 280. Bey längerer Dauer der Belaſtung wird die Elaſticität geringer.
§. 282. Abweichung, die nur aus einer irregulären Organiſation des zu den Verſuchen gewählten Holzes erklärt werden kann.
§. 283. Wiederholte Biegungen vermehren die Biegſamkeit eines Körpers.
§. 284. Die Lage der Aeſte und andere Irregularitäten verändern den Ausdruck für die Elaſticität.

Vierte Tabelle.

§. 287. Einrichtung der vierten Tabelle.
§. 288. Warum die Dimenſionen des zu den Verſuchen gewählten Fichtenholzes gleich waren.
§. 289. Die Organiſation des Fichtenholzes iſt viel regelmäßiger, als die des Eichenholzes.

Fünfte Tabelle.

§. 290. Objekt der fünften Tabelle.
§. 291. Formel zur Berechnung der ſiebenten Colonne.

Sechste Tabelle.

§. 293. Die Fibern können ſich nicht biegen, ohne über einander weg zu gleiten.
§. 294. Man hat bisher auf ihre Longitudinal-Adhäſion nicht geachtet.
§. 295. Sie vermehrt die abſolute Elaſticität.
§. 296. Wenn ſie gleichförmig wäre, ſo würde ſie bey gleichen Dimenſionen des Körpers deſſen Länge proportional ſeyn.
§. 297. Warum dieſes Verhältniß nicht Statt hat.
§. 298. Gleichung, welche der Erfahrung entſpricht.
§. 299. Form der Coefficienten für das Verhältniß der Elaſticität.
§. 301. Er beſteht wirklich aus zwey Theilen.
§. 302. Wie man den mittlern Werth des Einfluſſes der Cohäſion auf die Elaſticität beſtimmen kann.
§. 304. Formel für den mittlern Werth des von der Organiſation des Holzes abhängenden Theiles des Coefficienten.
§. 305. Einrichtung der ſechſten Tabelle.
§. 306. Die hauptſächlichſten der bemerkten Abweichungen und deren Urſachen.
§. 307. Es darf darauf nicht geachtet werden.
§. 308. Mittler Werth des Coefficienten m + v.

Siebente Tabelle.

§. 309. Einrichtung dieſer Tabelle.
§. 310. Mittler Werth von m + v für Fichtenholz.

Achte Tabelle.

§. 311. Verhältniß der abſoluten Elaſticität zweyer Hölzer von gleichen Dimenſionen.
§. 312. Formel für die ſpecifiſche Elaſticität eines Cubik-Metre's.
§. 313. Unterſchied der nach den verſchiedenen Hölzern berechneten abſoluten Elaſticität.
§. 315. Wie die mittlere ſpecifiſche Elaſticität beſtimmt werden muß.
§. 316. Ihr Werth für Eichenholz.

Neunte Tabelle.

§. 317. Formel zur Beſtimmung der ſpecifiſchen Elaſticität des Fichtenholzes.
§. 318. Unterſchied der Elaſticität für die beyden zu den Verſuchen gewählten Stücke.
§. 319. Verhältniß der ſpecifiſchen Elaſticität des Eichen- und Fichtenholzes.

## Anwendung der Theorie und der vorſtehenden Tabellen auf einige beſondere Fälle. Folgerungen und allgemeine Bemerkungen.

§. 320. Gleichung zwiſchen den Dimenſionen eines feſten Körpers, der Laſt, womit er beſchwert iſt, und zwiſchen den größten Ordinaten der Krümmung.
§. 322. Anwendung auf den Fall, wenn der feſte Körper ein Cylinder iſt.
§. 323. Wenn der Körper an ſeinen Enden eingeklemmt iſt.
§. 324. Wenn er gegen den Horizont geneigt iſt.
§. 325. Auflöſung in Zahlen der §. 109 u. f. abgehandelten Frage.
§. 327. Wie unſere Formeln zur Beſtimmung des relativen Widerſtandes der Körper gebraucht werden kann.
§. 328. Was man in dieſem Falle für Eichen- und Fichtenholz erhält.
§. 329. Der von den Büffon'ſchen Verſuchen zu machende Gebrauch.

## Vierter Abſchnitt.

## Von den die Biegung begleitenden Umſtänden.

### Von den die Biegung begleitenden Umſtänden, wenn die Körper als vollkommen elaſtiſch angenommen werden, und von den hierauf Bezug habenden Fragen.

§. 330. Zweck und Nützlichkeit dieſes Abſchnittes.
§. 331. Beſchaffenheit der Frage.
§. 332. Ausdruck für die beſchleunigende Kraft, wodurch das Ende des feſten Körpers fortgezogen wird.
§. 333. Allgemeiner Werth der Geſchwindigkeit.
§. 334. Was entſteht, wenn die Biegung ſehr klein iſt.
§. 335. Wenn der Körper am Anfange der Bewegung geradlinigt iſt.
§. 336. Beſtimmung der größten Ordinate, die mit einer Geſchwindigkeit = 0 correſpondirt.
§. 337. Beſtimmung der größten Ordinate, welche der größten Geſchwindigkeit correſpondirt.
§. 338. Grenze der Oscillation.
§. 339. Ihre Dauer läßt ſich nicht genau angeben.
§. 340. Wenn die Biegung ſehr klein iſt, ſo findet keine Oscillation Statt.
§. 341. Dauer der Biegung nach dieſer Hypotheſe.
§. 343. Die Dauer der Biegung kann im Allgemeinen nicht angegeben werden.
§. 344. Unterſuchung über die bey der Biegung Statt habenden Umſtände, wenn die feſten Körper von gleichem Widerſtande ſind.
§. 345. Frage, veranlaßt durch §. 333.
§. 346. Ausdruck für die größte Ordinate der Krümmung, wenn das Gewicht, welches ſie hervorbringt, von einer gewiſſen Höhe fällt.
§. 347. Uebereinſtimmung dieſes Reſultats mit den Verſuchen des s'Graveſands und mit der Theorie des Georg Juan.

Geſetze der Compreſſibilität luftartiger Flüſſigkeiten; ihre Anwendung auf das Senken der Gebäude (taſſement) und auf das Biegen unvollkommen elaſtiſcher Körper.

§. 348. Urſachen des Senkens der Gebäude.

§. 349. Die Geſetze der Compreſſibilität können durch eine analytiſche Formel ausgedrückt werden.

§. 351. Sie ſind unabhängig von der Elaſticität der zuſammendrückbaren Körper.

§. 352. Unterſuchungen über dieſe Geſetze für luftartige Flüſſigkeiten.

§. 353. Formel für die Bewegung eines durch dieſe Flüſſigkeit unterſtützten, und mit einem gewiſſen Gewichte beſchwerten Stempels.

§. 354. Für den Fall, wo das Gleichgewicht zwiſchen dieſem Gewichte und der Expanſiv⸗Kraft der Flüſſigkeit eintritt.

§. 355. In welchem Falle die Weite und Dauer der Schwingungen ſehr klein ſind.

§. 356. Der Widerſtand gegen die Zuſammendrückung iſt eine Function der Zeit, während welcher die meiſten Körper zuſammen gedrückt werden.

§. 357. Ein beſonderer Werth für dieſe Function.

§. 359. Geſchwindigkeit des Gewichtes, wenn es nach dieſer Hypotheſe zuſammendrückt.

§. 360. Sie iſt beſtändig poſitiv.

§. 361. Verhältniß der Zeit zum Raume.

§. 362. Was aus dieſer Formel wird, wenn man auf die Zunahme der Dichtigkeit der zuſammengedrückten Flüſſigkeit mit achtet.

§. 363. Verhältniß der Größe und Dauer der Zuſammendrückung, wenn die Geſchwindigkeit ein Maximum iſt.

§. 364. Was folgen muß, wenn n ſehr groß iſt.

§. 365. Dieſe Größe kann eine Function von s oder t ſeyn. Formeln, welche daraus entſtehen.

§. 366. Wie die beſtändigen Coefficienten in dieſer Function beſtimmt werden.

§. 367. Anwendung auf das Biegen unvollkommen elaſtiſcher Körper.

§. 368. Die beyden erſten Coefficienten durch einen Calcul aus Büffons und unſern Verſuchen abgeleitet.

Zehnte Tabelle.

§. 369. Einrichtung der zehnten Tabelle.

Eilfte Tabelle.

§. 371. Object der eilften Tabelle.

§. 372. Büffons Verſuch über die Dauer der Biegung bis zum Bruche.

§. 373. Anwendung unſerer Theorie auf dieſen Verſuch.

§. 374. Schluß.

---

# Analytiſche Abhandlung

von dem

# Widerſtande feſter Körper

und

von ſolchen feſten Körpern, welche einen gleichen Widerſtand leiſten.

Erſter Abſchnitt.

# Von dem Widerſtande feſter Körper.

## Allgemeine Formeln von dem Widerſtande feſter Körper. Anwendung dieſer Formeln auf die von Galilei, Leibnitz und Mariotte aufgeſtellten Hypotheſen.

§. 1.

Der Körper ABCDLM (Fig. 1.), von dem wir annehmen, daß er aus kleinen Fibern zuſammen geſetzt ſey, die alle unter ſich, und zwar nach der Länge des Körpers AL, parallel ſind, ſey unter einem rechten Winkel in eine unbewegliche Vertical-Ebene befeſtigt. Unterſuchung wegen eines allgemeinen Ausdrucks für den abſoluten Widerſtand der feſten Körper.

Wir nehmen nun an, an dieſem Körper ziehe irgend eine Kraft Q parallel mit den Fibern, die wir als die Integral-Theile des Körpers betrachten. Wie nun auch die Ausdehnbarkeit dieſer Fibern beſchaffen ſeyn mag, ſo iſt doch ſo viel klar, daß ſie der Gewalt Q, welche ſie zu zerreißen trachtet, mit einer Kraft widerſtehen, die ihrer Anzahl, oder, was daſſelbe iſt, die der Baſis des feſten Körpers an derjenigen Stelle, woſelbſt der Bruch, wenn er wirklich erfolgte, Statt haben würde, proportional iſt.

Man nehme nun an, dieſe Baſis, welche wir in der Folge die Brechungsebene nennen wollen, ſey der verticale Schnitt, den der Körper AB CDLM mit der Ebene XYZ macht. In dieſe Ebene gedenke man ſich, und zwar durch den unterſten Punkt der Brechungsebene, eine horizontale Linie AC; die hierauf errichteten Linien KK′ und EF ſeyn unendlich nahe an einander und bis an die Oberfläche des feſten Körpers verlängert. Jetzt ſetze man $AK = x$; $KK' = z$; $KE = dx$, und den Widerſtand einer jeden Fiber $= dx$; ſo iſt $Q = rszdx + C$ ein allgemeiner Ausdruck für den Widerſtand, den ein feſter Körper einer Kraft leiſtet, die ihn parallel mit den Fibern, woraus er zuſammen geſetzt iſt, zu zerreißen ſtrebt. Dieſen Widerſtand nennt man den abſoluten Widerſtand. Man ſieht, daß er beſtändig von der Quadratur einer Ebene abhängt.

## §. 2.

Unterſuchung über einen allgemeinen Ausdruck des relativen Widerſtandes.

Aus dem über der Achſe AC am höchſten gelegenen Punkte B des Umfanges ABC der Brechungsebene ſey ein Perpendikel BD auf dieſe Achſe gelaſſen.

Jetzt nehmen wir an, daß an dem Körper ABCDLM eine andere Kraft P nach einer Richtung ziehe, die perpendikulär auf die Richtung der Fibern iſt. Nun iſt es klar, daß dieſe Kraft dahin ſtrebt, den Körper in dem Unterſtützungspunkte zu zerbrechen, indem ſie die Fiber, woraus der Körper beſteht, um eine horizontale und unbewegliche Achſe AC, die in der Brechungsebene liegt, ausdehnet. Um hierfür einen Ausdruck zu finden, betrachten wir eine Fiber hh′ in dem kleinen Rectangel KK′EF. Wenn man annimmt, daß dieſe um die Achſe AC ausgedehnt wird, ſo widerſteht ſie dieſer Ausdehnung mit einer gewiſſen Gewalt, die von der beſondern Beſchaffenheit der Fiber abhängt, die ſich aber durch die Ordinate HN irgend einer um BD, als um ihrer Achſe beſchriebenen krummen Linie, darſtellen läßt. Dieſe durch die Ordinate HN dargeſtellte Gewalt widerſtrebt der Umdrehung des feſten Körpers um die Drehungsachſe AC, indem ſie an dem Hebelarme AD wirkt. Macht man alſo $HD = z$; $HN = u$, und die Dicke irgend einer Fiber $= dz$; ſo wird der Widerſtand der Fiber hh′, die um die Größe HD von der Umdrehungsachſe entfernt iſt, ſeyn $= uzdzdx$; der Widerſtand aller Fibern des kleinen Rectangels KK′EF wird alſo durch das Integral $dx\,s\,uzdz + A$ dargeſtellt werden, und folglich wird der Ausdruck für den Widerſtand der ganzen Brechungsebene allgemein ſeyn $= s\,dx\,(s\,uzdz + A) + B$. Dieſen Widerſtand nennt man den relativen Widerſtand.

§. 3.

Wenn man, anſtatt die Elemente der Brechungsebene perpendikulär auf der Umdrehungsachſe AC zu nehmen, wie wir gethan haben, ſie parallel mit dieſer Achſe nimmt, ſo kömmt man zu der Formel für den Widerſtand der feſten Körper, wie ſie Varignon in den Memoires de l'Académie des ſciences von dem Jahre 1702 gefunden hat.

Wie man zu der von Varignon 1702 gegebenen Formel für den Widerſtand der feſten Körp. gelangt.

§. 4.

Wenn die Kraft P an den Hebelarm TD = f wirkt, ſo erhält man für den Fall des Gleichgewichts zwiſchen dem Widerſtande der Brechungsebene und der Kraft P,

Verhältniß des abſoluten Widerſtandes zu dem relativen Widerſtande der feſten Körper.

$$Pf = sdx(suzdz + A) + B.$$

Hieraus erhält man

$$P = \frac{1}{f} sdx(suzdz + A) + B.$$

Und folglich nach (§. 1.)

$$P:Q = \frac{1}{f} sdx(suzdz + A) + B : rszdx + C.$$

Wenn alſo die eine von den Kräften P oder Q bekannt iſt, ſo kann man daraus unmittelbar den Werth der andern finden, ſo bald die Figur der Brechungsebene des gegebenen feſten Körpers bekannt iſt. Es iſt nur noch nöthig, die angezeigte Integration wirklich vorzunehmen, indem man anſtatt der Ordinate u ihren Werth in die Function von z, und den Werth dieſer letztern Größe in die Function von x ſubſtituirt.

§. 5.

Nehmen wir mit Galilei an, daß alle Fibern, woraus der Körper ABCDLM zuſammen geſetzt iſt, auf eine gleiche Weiſe widerſtehen, und zwar eine jede mit ihrem abſoluten Widerſtande; ſo wird nach dieſer Hypotheſe die krumme Linie GN, deren Ordinaten allgemein die Gewalt der ihnen correſpondirenden Fibern darſtellen, eine gerade Linie, die in der Entfernung GB = r von der Linie BD mit dieſer parallel iſt, da r alsdann die abſolute Kraft der Fibern bedeutet. Die Formel Pf = sdz(suzdz + A) + B verwandelt ſich alſo in dieſe

Wie die Formel für den relativen Widerſtand nach der Hypotheſe des Galilei wird.

$$(1) \ldots Pf = sdx(srzdz + A) + B = sdx\left(\frac{rz^2}{2} + A\right) + B.$$

§. 6.

Es wird der beſondere Fall betrachtet, daß der Körper aus gleichartigen Theilen beſteht.

Wenn der gegebene feſte Körper aus gleichartigen Theilen beſteht, und die Fibern von der Oberfläche bis an die Brechungsebene ſich ununterbrochen erſtrecken, ſo wird der Widerſtand $\frac{rz^2}{2} + A = 0$ ſeyn, wenn $z = 0$ iſt, woraus man folglich $A = 0$ erhält, und da der Ausdruck $s\,dx \left(\frac{rz^2}{2} + A\right) + B$ vollſtändig iſt, wenn $Kh = KK' = y$, oder gleich der Ordinate der krummen Linie ABC iſt; ſo folgt daraus, daß die Formel $Pf = s\,dx \left(\frac{ry^2}{2}\right) + B$ nach der Hypotheſe des Galilei den relativen Widerſtand eines feſten homogenen Körpers, deſſen Fibern vollkommen unausdehnbar, oder aus lauter kleinen harten Körperchen zuſammen geſetzt ſind, ganz allgemein angiebt.

§. 7.

Was aus derſelben Formel nach der Hypotheſe Mariotte's und Leibnitzens wird.

Wenn wir aber mit Mariotten, Leibnitzen und Bernoulli annehmen, daß die Fibern elaſtiſch ſind; ſo iſt es, wenn man ferner noch immer annimmt, daß das an dem Hebelarm TD angebrachte Gewicht den feſten Körper um die Achſe AC zu drehen ſtrebt, klar, daß die Ausdehnung einer jeden Fiber um dieſe Achſe der Entfernung derſelben von dieſer Achſe porportional ſeyn muß. Da man nun weiß, daß ein jeder vollkommen elaſtiſche Körper mit eben der Kraft, womit er zuſammen gedrückt oder auch ausgedehnt wird, ſich wieder in ſeinen natürlichen Zuſtand zu verſetzen ſtrebt; ſo folgt hieraus, daß eine jede Fiber des kleinen Rechtecks KK'EF im Verhältniſſe ihrer Ausdehnung, oder was daſſelbe iſt, im Verhältniſſe des Hebelarmes Kh widerſteht. Nach dieſer Hypotheſe muß alſo die krumme Linie GN ſich in eine gerade Linie verwandeln, die durch die Punkte G und D geht. Die Kräfte HN erhalten ſich alſo unter einander, wie die Ordinaten des Triangels BGD. Um dafür einen Ausdruck zu finden ſetzen wir die größte Ordinate DB der Brechungsebene $= h$, und bemerken dabey, daß die dem Punkte B correſpondirende Fiber zuerſt von allen bricht, und zwar alsdann, wenn ſie um die Größe $GB = r$ ausgedehnt ſeyn wird. Wir erhalten alſo $h : r = z : u = \frac{r^2}{h}$ für den Widerſtand der Fiber hh'. Die allgemeine Formel wird demnach (2) $Pf = s\,dx \left(\frac{rz^3}{3h} + A\right) + B$,

die ſich auf dieſe $Pf = sdx \frac{rz^3}{3h} + B$ reducirt, wenn der gegebene Körper eine einzige, überallangefüllte und gleichartige Maſſe iſt.

§. 8.

Wenn man annimmt, daß die Coordinaten der durch die Oberfläche des gegebenen feſten Körpers und durch die Brechungsebene beſtimmten krummen Linie von dem Punkte A angerechnet werden, wo auch der Anfang der widerſtehenden Fibern iſt, ſo wird die conſtante Größe B in den vorhergehenden Formeln = o, und die Formeln ſelbſt werden alſo

Was aus dieſer Formel wird, wenn die widerſtehenden Fibern, und die Coordinaten der Brechungsebene einerley Anfang haben.

$$Pf = rsdx \frac{y^2}{2}$$

$$Pf = \frac{r}{3h} sy^3dx.$$

§. 9.

Es iſt kein Körper bekannt, der vollkommen hart iſt; und eben ſo wenig kennen wir Körper, die vollkommen elaſtiſch ſind. Hierdurch werden alſo ſtrenge genommen die eben gefundenen Formeln für die Praktik unzulänglich. Da es uns indeß an Mitteln fehlt, genau den Grad der Härte oder der Elaſticität irgend eines Körpers unmittelbar zu erfahren, ſo können wir den Widerſtand, welchen ſie leiſten, nicht anders der Berechnung unterwerfen, als wenn wir ſie entweder vollkommen hart, oder vollkommen elaſtiſch annehmen, wobey man alsdann die nothwendigen Correctionen in die Folge durch Verſuche finden muß.

Die bey dieſen Formeln nothwendig werdenden Modificationen können nur durch Verſuche ausgemittelt werden.

§. 10.

Aus dem Vorhergehenden erſieht man, daß Galilei's Hypotheſe nur für gewiſſe Körper gelten kann. Wir kennen in der That einige, welche faſt für vollkommen unbiegſam anzunehmen ſind. Hierher gehören im Allgemeinen die Steine und Mineralien *).

Welches diejenigen Körper ſind, bey denen die Galileiſche Hypotheſe angewandt werden muß.

*) Wir ſagen im Allgemeinen, weil man ſchon lange braſilianiſche Sandſteine und eine Art Marmor an dem Pallaſte Borgheſe zu Rom kennt, die elaſtiſch ſind.

§. 11.

Bey welchen Körpern die Leibnitziſche Hypotheſe anwendbar iſt.

Die Fibern, woraus die organiſchen Körper zuſammen gefügt ſind, ſind im Gegentheile alle mehr oder weniger ausdehnbar. Die Nerven (les nerfs), das Holz, und im Allgemeinen alle Vegetabilien ſcheinen dieſe Beſchaffenheit zu haben. Der Widerſtand ſolcher Körper muß alſo nach der Mariottiſchen und Leibnitziſchen Hypotheſe berechnet worden.

§. 12.

Jacob Bernoulli's Bemerkungen über die Fibern in dem Augenblicke des Brechens.

Man hat beobachtet, daß die Fibern eines feſten Körpers keinesweges um die Linie AC ſich ausdehnen, ſondern daß die Achſe der Bewegung zwiſchen den Punkten D und B, z. B. in S fällt, ſo daß in dem Augenblick, worin der Bruch erfolgt, die zwiſchen S und K gelegnen Fibern im Verhältniſſe ihrer Entfernungen von dieſem Punkte ſich ausdehnen; dahingegen die Fibern zwiſchen S und D, ebenfalls im Verhältniſſe ihrer Entfernungen von dem Punkte S, zuſammengepreßt werden. Jacob Bernoulli, dem wir dieſe Bemerkung zu verdanken haben, hat bewieſen *) daß, wo auch die Lage der Bewegungsachſe in der Brechungsebne ſeyn möge, dieſelbe Kraft an demſelben Hebelarme immer denſelben Effect hervorzubringen im Stande iſt, und daß es in Rückſicht dieſes Effects vollkommen einerley iſt, ob alle Fibern um dieſe Achſe ausgedehnt, oder zuſammengepreßt, oder ob nur ein Theil derſelben ausgedehnt und der andere Theil zuſammengepreßt werden. Bernoulli hat auch die Schwierigkeit gezeigt, welche die Beſtimmung des Punktes S haben würde, der weder Ausdehnung noch Zuſammenpreſſung auszuhalten hat. Da unſer Zweck nur iſt, die Kraft zu beſtimmen, welche im Stande iſt, einen gegebenen feſten Körper zu biegen oder zu zerbrechen, ſo nehmen wir, wie bisher geſchehen iſt, auch in der Folge an, daß alle widerſtehende Fibern um die Achſe AC ausgedehnt werden.

---

Der Bürger Fleuriau de Bellevue hat im Anfange des Jahres 1792 nicht bloß noch verſchiedene andere Arten Steine bekannt gemacht, die von Natur biegſam und elaſtiſch ſind; ſondern er hat auch ein Mittel angegeben, wodurch noch einige andere mineraliſche Subſtanzen biegſam gemacht werden können. M. ſ. Journal de Physique, Août 1792.

*) Mémoires de l'académie des ſciences, année 1704.

## §. 13.

Welches das Produkt der Spannungen der widerſtehenden Fibern nach Galilei's Theorie iſt.

Man kann ſich einen beſtimmten Begriff machen von der Art, wie Galilei und Leibnitz ſich den relativen Widerſtand der feſten Körper gedacht haben, wenn man ſich einen um den Punkt A beweglichen und an eben dieſem Punkte nach einem rechten Winkel gebogenen Hebel BAF (Fig. 2) gedenkt, und ſich vorſtellt, an dem einen Hebelarm AB ſeyn in B, m, m′, m″ u. ſ. w. Fäden befeſtigt, die über kleine, in derſelben Ebene angebrachte Rollen N, n, n′ n″ u. ſ. w. gehen, wovon eine jede an ihrem Ende mittelſt eines unter ſich gleichen und beſtimmten Gewichtes r angeſpannt iſt. Wenn man nun annimmt, daß an dem Ende F des andern Hebelarmes AF ein gewiſſes Gewicht P zieht; ſo iſt es klar, daß dieſes Gewicht, welches den verſchiedenen und gleichen Gewichten r, r, r gerade entgegen wirkt, das ganze Syſtem um den Punkt A zu drehen ſich beſtrebt. Wenn alſo die entgegengeſetzten Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo hat man nach ſtatiſchen Geſetzen, wenn BF = f und AB = h geſetzt wird,

$$Pf = rAm^{IV} + rAm''' + rAm'' + rAm' \ldots\ldots rh.$$
$$= r(Am^{IV} + Am''' Am'' + rm' + \ldots\ldots h)$$

Sind nun die Entfernungen $Am^{IV}$; $m^{IV}m'''$; $m'''m''$; $m''m'$ u. ſ. w. unter ſich gleich; ſo iſt die Größe $Am^{IV}$, $Am'''$, $Am'' + \ldots\ldots h$ eine Reihe der natürlichen Zahlen, die von Eins bis zu der Größe h ſteigt. Die Summe dieſer Reihe iſt bekanntlich $\frac{h^2 + h}{2}$. Wenn alſo h unendlich iſt, das heißt, wenn die Entfernungen $Am^{IV}$; $m^{IV}m'''$; $m'''m''$; $m''n'$ u. ſ. w. unendlich klein ſind; ſo wird der Ausdruck für die geſuchte Summe $= \frac{h^2}{2}$, und ſonach erhält man $Pf = \frac{rh^2}{2}$. Dieſe Gleichung iſt mit der gefundenen Formel $Pf = rs\frac{y^2dx}{2}$ einerley, wenn in dieſer Formel $y = h$ und $sdx = 1$ geſetzt wird.

Der Widerſtand der Fibern kann alſo nach Galilei durch die unter ſich gleichen Spannungen der Fäden NB; nm; n′m′ u. ſ. w. dargeſtellt werden.

§. 14.

Wie man die Spannungen der Fibern nach Leibnitzens Syſtem zu betrachten hat.

Nimmt man jetzt an, daß die Gewichte an den Fäden NB, nm, (Fig. 3.) ungleich, und den Hebelarmen, woran ſie ziehen, proportional ſind; ſo erhält man, wenn wir dieſe Gewichte mit r, r′, r″ u. ſ. w. bezeichnet,

$$r:h = r':Am = r'':Am' = r''':Am'' \text{ u. ſ. w.}$$

Folglich

$$r' = \frac{rAm}{h};\ r'' = \frac{rAm'}{h}, \text{ u. ſ. w.}$$

Die Kraft dieſer relativen Gewichte auf den Punkt A iſt alſo

$$= \frac{r}{h}(Am^2 + Am''^2 + \ldots\ldots hh)$$

Nehmen wir nun die Entfernungen m′ m″ u. ſ. w. gleich an; ſo ſtellt die Größe $Am^2 + Am'^2 + \ldots\ldots h^2$ die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen von Eins bis h vor. Die Summe dieſer Reihe von Quadraten iſt $= \frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} + \frac{h}{6}$, oder wenn h unendlich groß, d. h. wenn die Entfernungen Am; mm′; m′ m″ u. ſ. w. unendlich klein ſind, ſo iſt dieſe Summe $= \frac{h^3}{3}$. Nach dieſer Vorausſetzung hat man alſo

$$Pf = \frac{rh^3}{3h} = \frac{rh^2}{3}$$

Welche Formel mit der ſchon oben gefundenen $Pf = \frac{r}{3h}\, sy^3 dx$ einerley iſt, wenn in dieſer $y = h$ und $dx = 1$ geſetzt wird. Folglich kann die Summe der ungleichen Spannungen der Fäden NB, nm, u. ſ. w. den Widerſtand eines feſten Körpers darſtellen, der, nach Leibnitzens und Mariottens Hypotheſe, aus elaſtiſchen Fibern zuſammen gefügt iſt.

Wir werden jetzt einige Anwendung von dieſen ſo eben gefundenen allgemeinen Formeln zeigen.

## Unterſuchungen über den Widerſtand verſchiedener Brechungsebenen nach Galilei's Hypotheſe.

### §. 15.

*Von dem Widerſtande einer rectangulären Brechungsebene, deren eine Seite die Umdrehungsachſe iſt.*

Es ſoll der Widerſtand eines feſten Körpers gefunden werden, deſſen Brechungsebene ABCD (Fig. 4) rectangulär iſt. Zu dem Ende ſeyn auf der Linie AC, die hier immer als die Umdrehungsachſe betrachtet wird, die beyden unendlich nahen Linien PQ, pq ſenkrecht gezogen, wodurch das kleine Rechteck Pp Qq entſteht. In der Linie PQ nehme man irgend einen willkührlichen Punkt r, und ſetze $AP = x$; $Pr = z$; die Höhe AB der Brechungsebene $= h$, und ihre Länge $AC = a$.

Da wir nun annehmen, daß der gegebene Körper in ſeiner ganzen Ausdehnung überall mit einer gleichartigen Materie angefüllt iſt; daß die Coordinaten der Berechnungsebene mit den widerſtehenden Fibern einerley Anfang haben, ſo ſind die in der allgemeinen Formel (1) vorkommenden beſtändigen Größen A und B hier $= 0$, und die Formel wird demnach $Pf = rs\frac{y^2 dx}{2}$, oder weil $y = h$ iſt, ſo erhält man $Pf = rs\frac{h^2 dx}{2}$. Vollſtändig wird dieſer Ausdruck, wenn $x = a$ und folglich $Pf = \frac{rah^2}{2}$ wird.

### §. 16.

Wenn $f = h$, d. h. wenn der Hebelarm der Kraft P der Höhe des feſten Körpers gleich iſt, ſo iſt $P = \frac{rah}{2}$. Für die Kraft Q, welche der abſoluten Feſtigkeit der Fibern eben dieſes feſten Körpers gleich iſt, haben wir (§. 1.) den Ausdruck $rah$ gefunden. Nach Galilei's Hypotheſe iſt alſo dieſe Kraft für den hier betrachteten beſonderen Fall das Doppelte derjenigen Kraft, welche mit dem relativen Widerſtande eben derſelben Fibern im Gleichgewichte ſeyn würde.

### §. 17.

*Regeln, um den relativen Widerſtand prismatiſcher Körper zu finden.*

Für ein anderes Priſma, deſſen Brechungsebene gleichfalls rectangulär, deſſen Höhe $h'$, Breite $a'$ und Länge $f'$ iſt, ſey das dem relativen Widerſtande der

Fibern gleiche Geweicht P′, ſo iſt $P' f' = \frac{ra'h'^2}{2}$. Man erhält alſo $P:P' = \frac{ah^2}{f} : \frac{a'h'^2}{f'}$. Folglich ſind die Kräfte P und P′ unter ſich im geraden Verhältniſſe der Produkte aus dem Quadrate der Höhe der Brechungsebene multiplicirt mit den Breiten dieſer Ebenen; und im umgekehrten Verhältniſſe der Hebelarme, woran ſie wirken.

§. 18.

Hieraus folgt, daß unendlich viele Prismen von ungleichen Maſſen einen gleichen Widerſtand leiſten können; denn hierzu dürfen nur die Ausdrücke $\frac{ah^2}{f}$ und $\frac{a'h'^2}{f'}$ unter ſich gleich ſeyn, dieß kann Statt haben, indem die Verhältniſſe der Größen a, h, f; a′, h′, f′ unendliche mahle verſchieden ſeyn können.

§. 19.

Wenn man die Längen f, f′ gleich annimmt; ſo iſt das Verhältniß der unbeſtimmten Dimenſionen z und y von einer Reihe von Brechungsebenen, die einen gleichen relativen Widerſtand leiſten, durch die Gleichung $zy^2 = ah^2$ gegeben. Eine Gleichung, die der cubiſchen Hyperbel zwiſchen den Aſymptoten angehört.

§. 20.

Das Verhältniß des abſoluten Widerſtandes eben dieſer Brechungsebenen iſt durch die Gleichung $zy = ah$ gegeben, die der gemeinen Hyperbel angehört.

Formel für den Widerſtand einer triangulären Brechungsebene, deren eine Seite die Umdrehungsachſe iſt.

§. 21.

Wenn die Brechungsebene des gegebenen Prisma ein Triangel, deſſen eine Seite AC (Fig. 5.) die Umdrehungsachſe iſt, und wenn man ferner dieſelben Linien auf dieſelbe Art wieder bezeichnet, wie in dem vorhergehenden §.; ſo iſt es klar, daß

die Linie PQ, die der Größe y in der allgemeinen Formel entſpricht, durch $\frac{hx}{a}$ ausgedrückt iſt. Man hat alſo

$$Pf = rsdx \left(\frac{h^2 x^2}{2a^2}\right) = \frac{rh^2 x^3}{2a^2 . 3}$$

Dieſer Ausdruck iſt vollſtändig, wenn $x = a$ wird, und alsdann iſt $Pf = \frac{rah^2}{6}$. Der relative Widerſtand einer triangulären Brechungsebene iſt alſo nur ein Drittel des Widerſtandes einer rectangulären Brechungsebene von denſelben Dimenſionen, wenn man nähmlich annimmt, daß die brechende Kraft an dem Ende deſſelben Hebelarmes f angebracht iſt.

## §. 22.

Wenn man, anſtatt anzunehmen, daß die Fibern der triangulären Ebene ACD (Fig. 5.) ſich um die Seite AC, als um eine Umdrehungsachſe, ausdehnen, jetzt den Fall ſetzt, dieſe Ausdehnung erfolge um die Spitze A dieſes Triangels, oder vielmehr um die Linie AC (Fig. 6.), die durch den Punkt A geht, und in der Brechungsebene ſo liegt, daß ſie auf die Höhe AB ſenkrecht iſt; ſo ſieht man leicht ein, daß der Widerſtand in dieſer neuen Lage des Triangels von dem ſo eben gefundenen Widerſtand verſchieden ſeyn muß, indem die Fibern in Rückſicht auf die Umdrehungsachſe ganz anders liegen.

Widerſtand derſelben Brechungsebene, wenn die Umdrehungsachſe durch ihre Spitze geht.

Um den geſuchten Widerſtand zu beſtimmen, betrachten wir die allgemeine Formel $Pf = rsdx \left(\frac{z^2}{2} + A\right)$, und bemerken, daß in dem hier gegebenen Fall der Widerſtand $= o$ iſt, wenn $z = PM$ wird. Wir haben alſo $\frac{PM^2}{2} + A = o$, und folglich $A = - \frac{PM^2}{2} = - \frac{h^2 x^2}{2\ a^2}$. Sonach wird $Pf = rsdx \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2 x^2}{2\ a^2}\right)$; für $z = PQ = h$ wird dieſer Ausdruck $= \frac{r}{2} \left(h^2 x - \frac{h^2 x^3}{3\ a^2}\right)$; und für die ganze Brechungsebene wird er $= \frac{2rah^2}{6}$. Dieſer Widerſtand iſt alſo das Doppelte von

dem, den dieſelbe Brechungsebene in dem Falle leiſtet, wenn eine ihrer Seiten AC die Umdrehungsachſe iſt (§. 21.).

§. 23.

Aehnliche Brechungsebenen widerſtehen im Verhältniſſe des Cubus ihrer gleichnahmigen Seiten.

Aus dem Bisherigen folgt, daß der relative Widerſtand mehrerer triangulären auf gleiche Weiſe unterſtützten Prismen von gleicher Länge dem Quadrate der relativen Höhe der Brechungsebenen multiplicirt durch die Breite dieſer Ebenen proportional iſt. Wenn dieſe Ebenen alſo unter ſich ähnlich ſind, ſo widerſtehen ſie im Verhältniſſe des Cubus ihrer gleichnahmigen Seiten. Dieſe Bemerkung gilt von allen ähnlichen Figuren, wie ſie auch ſonſten beſchaffen ſeyn mögen.

§. 24.

Nach dem bisher Geſagten wird es leicht, das Verhältniß des Widerſtandes anzugeben, den eine quadratiſche Brechungsebene leiſtet, wenn einmal die eine ihrer Seiten als die Umdrehungsachſe angenommen wird, und ein andermal dieſe Achſe ſenkrecht auf die Diagonale iſt. Dieſes Verhältniß iſt $\sqrt{2} : 2$.

§. 25.

Widerſtand eines viertel Zirkels um ſeinen Halbmeſſer.

Wir wollen jetzt den Widerſtand eines Quadranten beſtimmen, deſſen einer Halbmeſſer die Umdrehungsachſe iſt.

Auf dem Durchmeſſer AD (Fig. 7.) ſeyn die Linien pm, p′m′ ſenkrecht und unendlich nahe an einander; r und r′ ſeyn auf dieſer Linie willkührlich gewählte Punkte. Ferner ſey der Halbmeſſer $AC = a$; $Ap = x$; $pr = z$. Weil nun der Körper in ſeiner ganzen Ausdehnung aus gleichartigen Fibern beſteht, und dieſe Fibern mit den Coordinaten in der gegebenen Brechungsebene einen gleichen Anfang nehmen; ſo iſt es klar, daß die unveränderlichen Größen A und B in der Formel (1) = o ſind. Es iſt ferner einleuchtend, daß der Ausdruck für den Widerſtand des rechtwinkelichen Elements pm p′m′ vollſtändig iſt, wenn

$$z = pm = \sqrt{(2ax - x^2)}$$

wird. Die Formel (1) wird alſo für dieſen Fall

$$Pf = \frac{r}{2} \int dx\ (2ax - x^2) = \frac{r}{2}\ (ax^2 - \frac{x^3}{3})$$

Für $x = a$ finden wir alſo $Pf = \frac{r}{2} \left(\frac{2a^3}{3}\right)$. Dieſer Widerſtand iſt folglich 2/3 des Widerſtandes, den das mit dem Halbmeſſer des Zirkels beſchriebene Quadrat AEBC leiſten würde. Nach §. 22. iſt der Widerſtand des Triangels AEB, wenn die Umdrehungsachſe durch die Spitze A geht, ebenfalls 2/3 des Widerſtandes des Quadrats, und folglich widerſtehen dieſer Triangel und der Quadrant ABC einer gleichen Kraft.

## §. 26.

Es ſoll der Widerſtand geſucht werden, wenn die Brechungsebene ein ganzer Zirkel A′BDB′ (Fig. 8.) iſt.

Es iſt klar, daß alle Fibern der gegebenen Brechungsebene ſich um die an den Punkt B′ ſenkrecht auf die Richtung der Kraft P gezogene Tangente AC drehen müſſen.

Nun ſey der Halbmeſſer A′D parallel mit der Tangente AC, und aus A′ ein Perpendikel AA′ auf dieſe Tangente gezogen. Endlich ziehen wir in der Brechungsebene A′BDB′ die Linien PQ, pq, ebenfalls ſenkrecht auf die Umdrehungsachſe, wodurch das rechtwinkelige Element Pq Qp entſteht.

Wird dieſes angenommen, ſo iſt zu bemerken, daß das zweyte Glied in der allgemeinen Formel $Pf = \frac{r}{2} \int dx\ (z^2 + A) + B$ verſchwinden muß, wenn $z = Pm = a \sqrt{(2ax - x^2)}$ wird. Dieß giebt $(a - \sqrt{[2ax - x^2]})^2 + A = 0$; folglich $A = -(a - \sqrt{[2ax - x^2]})^2$. Wird dieſer Werth für A in der Formel ſubſtituirt, ſo bekommt man

$$Pf = \frac{r}{2} \int dx \left\{ z^2 - [a - \sqrt{(2ax - x^2)}]^2 \right\}$$

Denn die Conſtante B iſt Null, indem die Coordinaten und die widerſtehenden Fibern der Brechungsebene in dem Punkte A′ einerley Anfang haben. Ferner iſt der Widerſtand des Elements mm′ Qq vollſtändig, wenn $z = PQ = a + \sqrt{(2ax - x^2)}$ wird. Man hat alſo endlich

$$Pf = \frac{r}{2}\int dx \left\{[a + \sqrt{(2ax - x^2)}]^2 - [a - \sqrt{(2ax - x^2)}]^2\right\}$$

$$= \frac{r}{2}\int dx \,.\, 4a\sqrt{(2ax - x^2)},$$

Das Integral dieſer Formel hängt von der Quadratur des Zirkels ab. Werden die nöthigen Reductionen vorgenommen, ſo erhält dieſe Formel folgende Geſtalt: $\frac{2ar}{2}\int dx\sqrt{(2ax - x^2)}$. Die jetzt unter dem Integrationszeichen begriffene Größe bezeichnet die Fläche eines gegebenen Zirkels, wenn man nämlich die Integration wirklich vornimmt, und alsdann $x = 2a$ macht.

## §. 27.

*Verhältniß zwiſchen dem Widerſtande des Zirkels und des darum beſchriebenen Quadrats.*

Nimmt man das von Metius angegebene Verhältniß des Umfanges zum Halbmeſſer an, ſo iſt dieſe Fläche $= \frac{355\,a^2}{113}$. Dieſem nach iſt der geſuchte Widerſtand $= \frac{r}{2}(8a^3)(0{,}785398)$. Vergleicht man dieſen Widerſtand mit dem Widerſtande des um den Zirkel beſchriebenen Quadrats, ſo wird man finden, daß ſie ſich zu einander, wie 0,785398 : 1 verhalten.

## §. 28.

*Von dem Widerſtande eines halben Zirkels um ſeine Tangente.*

Wenn bloß der Widerſtand des untern Halbzirkels A′B′D (Fig. 8.) gefunden werden ſoll; ſo muß man bedenken, daß der Ausdruck für den Widerſtand des rechtwinkeligen Elements Pp VS vollſtändig iſt, wenn $z = PV = a$ wird. Die allgemeine Formel wird alſo für dieſen Fall

$$Pf = \frac{r}{2}\int dx\left\{a^2 - [a - \sqrt{(2ax - x^2)}]^2\right\}$$

$$= \frac{r}{2}\int dx\,[2a\sqrt{(2ax - x^2)} - (2ax - x^2)]$$

$$= \frac{r}{2}\left(\frac{355\,a^3}{113} - \frac{4a^3}{3}\right) = \frac{r}{2}\,.\,2a^3\,.\,0{,}904129.$$

Der Widerſtand eines halben Zirkels weicht alſo wenig von 9/10 desjenigen Widerſtandes ab, den ein um dieſen halben Zirkel beſchriebenes Rechteck leiſten würde.

§. 29.

Wir wollen dieſen Artikel mit einigen Unterſuchungen über den Widerſtand der Röhren oder hohlen Cylinder beſchließen. Die Brechungsebene irgend einer Röhre ſtelle der zwiſchen den beyden Zirkeln RFaK″D und GNF′M (Fig. 9.) beſchriebene Ring dar, den wir excentriſch annehmen, um die Frage allgemein zu machen.

Allgemeiner Ausdruck für den Widerſtand eines hohlen Cylinders.

Es iſt klar, daß der Widerſtand der Röhre gleich iſt, dem Widerſtande eines feſten Cylinders, der zur Brechungsebene den äußeen Zirkel RFaK″D hat, weniger dem Widerſtande eines andern vollen Cylinders, deſſen Brechungsebene der innere Zirkel GNF′M und deſſen Umdrehungsachſe die Tangente AZ des äußern Zirkels iſt.

Aus §. 27. iſt aber bekannt, daß der relative Widerſtand eines Cylinders mit der Brechungsebene RFaK″D $= \frac{r}{2} (8a^3)(0{,}785398)$ iſt, wenn der Halbmeſſer dieſes Zirkels $= a$ genommen wird. Die Frage reducirt ſich alſo darauf, den Widerſtand des innern Cylinders zu finden, der um die Umdrehungsachſe AZ zerbrochen werden ſoll.

Durch den Punkt F″ an dem Umfange des Zirkels GNMF′ ſey eine Tangente F″Y parallel mit der Umdrehungsachſe AZ gezogen; ferner ſey der Halbmeſſer IF″ bis E verlängert, und F″E $= b$, und der Halbmeſſer F″I des Zirkels aber $= c$ angenommen. Endlich ſey der Durchmeſſer GF′ parallel mit der Tangente F″Y, und GK′ eine Tangente an dem Ende dieſes Durchmeſſers. Wir nennen nun wieder, wie bisher KP, x, u. ſ. w.

Betrachten wir nun die allgemeine Formel

$$Pf = \frac{r}{2} s\,dx\,(z^2 + A)$$

So iſt es klar, daß der Widerſtand, den das zweyte Glied dieſer Formel ausdrückt, Null ſeyn muß, wenn $z = PM = b + c - \sqrt{(2cx - x^2)}$ wird. Wir erhalten alſo

$$A = -[b + c - \sqrt{(2cx - x^2)}]^2.$$

Ferner iſt dieſer Widerſtand vollſtändig, wenn $z = PN = b + c + \sqrt{(2cx - x^2)}$ wird. Der Ausdruck wird alſo endlich

$$= \frac{r}{2} \int dx \left\{[b + c + \sqrt{(2cx - x^2)}]^2 - [b + c - \sqrt{(2cx - x^2)}]^2\right\}$$

$$= \frac{r}{2} \int dx\,(4b + 4c)\sqrt{(2cx - x^2)}.$$

Das Integral hängt wiederum von der Quadratur des Zirkels ab, und wird, wenn es vollſtändig und $x = 2c$ gemacht wird.

$$= \frac{r}{2}(0{,}785398)[2b(2c)^2 + (2c)^3]$$

Der geſuchte Widerſtand der Röhre iſt alſo

$$Pf = \frac{r}{2}(0{,}785398)[(2a)^3 - (2c)^3 - 2b(2c)^2].$$

## §. 30.

In welchem Falle der Widerſtand einer Röhre ein Maximum wird, angenommen, daß der Durchmeſſer des innern und äuſſern Zirkels gleich bleiben.

Man ſieht leicht ein, daß, wenn die Durchmeſſer des innern und äußern Zirkels unverändert bleiben, der Widerſtand der Röhre ein Größtes werden muß, wenn $b = 0$ iſt; das heißt, wenn die beyden Zirkel ſich an der Umdrehungsachſe AZ berühren.

## §. 31.

Eben ſo begreift man leicht, daß der eben abgehandelte Widerſtand immer derſelbe bleibt, ſo lange b unveränderlich iſt. Man ſieht dieß auch auf folgende Weiſe ein: die widerſtehenden Theilchen bleiben unveränderlich, und wirken an ein- und demſelben Hebelarm, wo auch der Mittelpunkt des innern Zirkels außer dem Punkte p liegen mag, wenn er nur in der mit der Umdrehungsachſe parallelen Linie GF′ bleibt.

## §. 32.

*Wie groß dieſer Widerſtand iſt, wenn die innern und äußern Zirkel concentriſch ſind.*

Nehmen wir $b = a - c$, ſo haben wir, wenn wir dieſen Werth in den vorhergehenden Ausdruck ſubſtituiren, den Widerſtand eines hohlen Cylinders, deſſen innerer und äußerer Zirkel concentriſch ſind. Für dieſen beſondern Fall iſt alſo

$$Pf = \frac{r}{2} (0{,}785398) \cdot (8a^3 - 8ac^2) = \frac{r}{2} \cdot 2a \left(\frac{355}{113}\right) (a^2 - a^2)$$

Der Widerſtand des äußern Zirkels als voll angenommen war (§. 27.) $\frac{r}{2} \cdot 2a^3 \cdot \frac{355}{113}$, und verhält ſich alſo zu dem Widerſtande der Röhre $= a^2 : a^2 - c^2$; das heißt, wie die Brechungsebenen, indem, wenn die Baſis des Cylinders durch $a^2$ ausgedrückt wird, die Baſis der Röhre, oder der zwiſchen den beyden Zirkeln enthaltene Ring $= a^2 - a^2$ iſt.

## §. 33.

*Verhältniß des Widerſtandes einer Röhre zu dem Widerſtande eines Cylinders von gleichem Volumen.*

Der Halbmeſſer der Baſis irgend eines Cylinders ſey allgemein g. Das Verhältniß des Widerſtandes dieſes Cylinders zu dem Widerſtande einer Röhre, deren innerer Halbmeſſer $= c$, und deren äußerer Halbmeſſer $= a$ heißt, iſt $= g^3 : a (a^2 - c^2)$. Wenn alſo $g^2 = a^2 - a^2$ iſt, d. h. wenn der Cylinder und die Röhre gleiche Maſſen haben, ſo wird, wenn ihre Längen gleich angenommen werden, ihr Widerſtand ſich verhalten, wie $g : a$, oder wie ihre Halbmeſſer, oder endlich, wie ihre gleichnahmigen Linien *).

## §. 34.

*Einen Cylinder zu finden, deſſen Widerſtand zu dem Widerſtande einer Röhre ein gegebenes Verhältniß habe.*

Nach dem bisher Geſagten iſt es leicht, den Durchmeſſer eines Cylinders zu finden, deſſen Widerſtand zu dem Widerſtande einer gegebenen Röhre das Verhältniß m:n habe. Wir haben geſehen, daß der Widerſtand des Cylinders zu dem

---

*) Dieſer Satz iſt zuerſt von Galilei in ſeinen Dialogen S. 147. erwieſen worden.

der Röhre $= g^3 : a\,(a^2 - c^2)$. Dieſes Verhältniß ſoll hier wie $m:n$ ſeyn, folglich hat man

$$g^3 : a\,(a^2 - c^2) = m:n.$$

Und dieß giebt

$$g = \sqrt[3]{\left[\frac{m}{n}\, a\,(a^2 - c^2)\right]}$$

Eine Gleichung, die eben ſo leicht in Zahlen, als geometriſch aufzulöſen iſt.

---

## Anwendung der von Leibnitzen und Mariotte aufgeſtellten Hypotheſe auf einige beſondere Fälle.

Wenn wir annehmen, daß die Körper aus gleichartigen und elaſtiſchen Fibern beſtehen; ſo iſt die Formel, welche hier anzuwenden iſt, dieſe

$$(2) \ldots Pf = \frac{r}{3h}\, sdx\,(z^3 + A) + B \quad (\S.\ 7.)$$

### §. 35.

Widerſtand einer rechtwinkeligen Brechungsebene.

Wir werden nach dieſer Hypotheſe zuerſt den Widerſtand eines prismatiſchen Körpers zu beſtimmen ſuchen, deſſen Brechungsebene ein Rectangel und $= ah$ iſt. Wir nehmen, wie bisher, an, daß die Dimenſion h mit der Richtung der Kraft, welche den Bruch zu erzeugen ſtrebt, parallel, und daß die Dimenſion a perpendikulär auf dieſe Richtung iſt.

Es ſey ABCD (Fig. 4.) die Brechungsebene, deren Widerſtand geſucht wird; ferner ſey $AC = a$; $AB = h$; $AP = x$; $Pp = dx$; $Pr = z$ ſo iſt es klar, daß für dieſen beſondern Fall die beſtändigen Größen A und B $= 0$ ſind. Die Formeln (2) alſo $Pf = \frac{r}{3h}\, szdx$, deren zweytes Glied vollſtändig wird,

wenn $z = h$ und folglich $Pf = \frac{r}{3h} \cdot h^3 x$ wird. Setzt man endlich $x = a$, ſo erhält man $Pf = \frac{rah^2}{3}$.

## §. 36.

Regel, um den Widerſtand feſter priſmatiſcher Körper zu berechnen, die denen §. 17. analog ſind.

Es folgt hieraus, daß der Widerſtand mehrerer rechtwinkeligen Priſmen von gleichartiger Materie ſich verhält, wie die Quadrate derjenigen Dimenſionen der Brechungsebene, die parallel mit der Richtung der brechenden Kraft ſind, multiplicirt durch die andere Dimenſion der Brechungsebene, und dividirt durch die Länge des Hebelarms, an deſſen Ende die brechende Kraft angenommen wird. Dieſes Reſultat kommt mit demjenigen überein, welches wir auch nach Galilei's Hypotheſe gefunden haben.

## §. 37.

Vergleichung der nach Galilei's und nach Leibnitzens Hypotheſe erhaltenen Reſultate.

Wenn man für die beſondere Formel $Pf = \frac{rah^2}{3}$ (§. 35.) annimmt, daß $f = h$, d. h. daß der Hebelarm, an deren Ende die Kraft den Bruch zu bewirken ſtrebt, der Dimenſion h gleich ſey, ſo wird $P = \frac{rah}{3}$. Man weiß nun, daß die Kraft Q, welche mit dem abſoluten Widerſtande dieſer Brechungsebene im Gleichgewichte auf dieſe Art ausgedrückt wird, daß $Q = rah$ iſt. Hieraus erhält man $P:Q = \frac{1}{3} : 1$. Nach dieſer zweyten Hypotheſe iſt der relative Widerſtand alſo nur ein Drittel des abſoluten Widerſtandes. Oben haben wir nach Galilei's Hypotheſe unter denſelben Vorausſetzungen gefunden, $P:Q = \frac{1}{2} : 1$. Man ſieht hieraus, daß, wenn man für einerley rectanguläre feſte Körper den relativen Widerſtand nach den Hypotheſen von Galilei und Leibnitz berechnet, die Reſultate ſich alsdann verhalten werden, wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3:2$.

## §. 38.

Widerſtand eines Dreyecks um die eine ſeiner Seiten.

Wir wollen jetzt den Widerſtand einer triangulären Brechungsebene (Fig. 5.) beſtimmen, wobey wir annehmen, daß ihre Seite AC die Umdrehungsachſe ſey.

Hiernach iſt die in der allgemeinen Formel enthaltene conſtante Größe $A = 0$, weil der Widerſtand Null iſt, wenn $z = 0$ wird. Dieſe Formel wird alſo

$$Pf = \frac{r}{3h} sdx . \frac{h^3 x^3}{a^3} = \frac{r}{3h} . \frac{h^3 x^4}{4a^3}$$

Wird nun auch $x = a$ geſetzt, um den geſammten Widerſtand der gegebenen Brechungsebene zu erhalten, ſo findet man $Pf = \frac{r}{3} . \frac{a h^2}{4}$. Der Widerſtand dieſer triangulären Brechungsebene iſt alſo nur der vierte Theil des Widerſtandes einer rectangulären Brechungsebene von denſelben Dimenſionen.

## §. 39.

Wenn die Drehungsachſe durch die Spitze geht.

Wenn wir für dieſelben Linien dieſelbe Bezeichnung beybehalten, und dabey annehmen, daß die Umdrehungsachſe ſenkrecht auf die Dimenſion AB ſey und durch die Spitze des Triangels A (Fig. 6.) gehe, ſo finden wir für den Widerſtand derſelben Brechungsebene in dieſer neuen Lage

$$Pf = \frac{r}{3h} sdx \left(z^3 - \frac{h^3 x^3}{a^3}\right)$$

Weil $A = - \frac{h^3 x^3}{a^3}$ iſt. Wird die angedeutete Integration vorgenommen, und $z = h$ geſetzt, ſo erhält man $Pf = \frac{r}{3h} \left(h^3 x - \frac{h^3 x^4}{4a^3}\right)$, einen Ausdruck, der, wenn $x = a$ genommen wird, endlich $\frac{r}{3} . \frac{3ah^2}{4}$ oder das Dreyfache des Widerſtandes für die erſtere Lage des Triangels, und drey Viertel des Widerſtandes der rectangulären Brechungsebene von denſelben Dimenſionen, giebt.

## §. 40.

Nach der Formel (2) werden wir finden, daß der Widerſtand einer quadratiſchen Brechungsebene, wenn die eine ihrer Seiten die Umdrehungsachſe iſt, zu dem Widerſtande derſelben Ebene, wenn die Umdrehungsachſe auf dem einen Ende ihrer Diagonale ſenkrecht iſt, ſich wie 1 : 2 verhält.

## §. 41.

Wir wollen jetzt den Widerſtand einer kreisförmigen Brechungsebene zu beſtimmen ſuchen, wenn deren Umdrehungsachſe eine an irgend einem Punkte ihres Umfanges gezogene Tangente AC (Fig. 8.) iſt.

Unterſuchung über den Widerſtand einer kreisförmigen Brechungsebene um ihre Tangente.

Der Durchmeſſer A′D ſey parallel mit der Tangente AC; aus dem Punkte A ſey AA′ ſenkrecht auf dieſe Tangente, und ſo ſeyn ebenfalls die in der Brechungsebene unendlich nahen Linien PQ, pq, wodurch das rechtwinkelige Element PQpq, gebildet wird, ſenkrecht auf die Umdrehungsachſe. Da der Durchmeſſer BB′ = 2a, perpendikulär auf die Umdrehungsachſe, die längſte Linie iſt, welche aus dem Punkte B bis zu dem concaven Umkreiſe der gegebenen Brechungsebene gezogen werden kann, ſo haben wir $\frac{r}{3h} = \frac{r}{3(2a)}$ und die Formel (2) wird

$$Pf = \frac{r}{3(2a)} \int dx\,(z^3 + A).$$

Die Conſtante B iſt Null, weil die Coordinaten und die widerſtehenden Fibern der Brechungsebene einen gleichen Anfang haben.

Das zweyte Glied dieſer Formel muß verſchwinden, wenn z = Pm wird, weil die widerſtehenden Fibern nur bis an den Umkreis A′B′DB reichen. Man erhält alſo dieſe Gleichung

$$A = -\left(a - \sqrt{[2ax - x^2]}\right)^3.$$

Ferner iſt der Widerſtand des ganzen Rectangels PQpq vollſtändig, wenn

$$z = PQ = a + \sqrt{(2ax - x^2)}$$

wird. Wird alſo die Formel (2) hiernach modificirt, ſo bekommt man

$$Pf = \frac{r}{3(2a)} \int dx \left\{[a + \sqrt{(2ax - x^2)}]^3 - [a - \sqrt{(2ax - x^2)}]^3\right\}$$

$$= \frac{r}{3a} \int dx\,(2ax - x^2)\,x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(2a - x)} + \frac{r}{3a}\,3a^2 \int dx \sqrt{(2ax - x^2)}.$$

Obgleich dieſe beyden Glieder nicht genau integrirt werden können; ſo können ſie doch dem wahren Integrale ſich ſo ſehr nähern, wie man will, und wie es für die

Praxis nöthig iſt, wenn die beyden irrationalen Größen $\sqrt{(2a - x)}$ und $\sqrt{(2ax - x^2)}$ in Reihen aufgelöſet werden.

Wird dieſe Auflöſung in Reihen, und die angedeutete Multiplication vorgenommen, ſo findet man, wenn $x = 2a$ geſetzt wird, für das erſte Glied

$$\frac{r}{3a} sdx (2ax - x^2) x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2a - x)} = \frac{16a^3r}{3} (0{,}074)$$

Und für das zweyte Glied

$$\frac{3a^2r}{3a} sdx \sqrt{(2ax - x^2)} = \frac{3a^3r}{3} (3{,}143392).$$

Ihre Summe oder der geſuchte Widerſtand iſt alſo

$$\frac{16a^3r}{3} (0{,}074) + \frac{3a^3r}{3} (3{,}143362) = \frac{r}{3} \cdot 8a^3 (0{,}737381).$$

Der Widerſtand einer gegebenen kreisförmigen Brechungsebene verhält ſich alſo zu dem Widerſtande einer quadratiſchen Brechungsebene, die um dieſen Kreis beſchrieben iſt, wie 0,737381 : 1.

## §. 42.

Widerſtand eines halben Zirkels um ſeinen Durchmeſſer und um ſeine Tangente.

Nach eben der Formel (2) kann man den Widerſtand einer halbzirkelförmigen Brechungsebene leicht finden, ſowohl wenn die Drehungsachſe der Durchmeſſer, als die Tangente dieſes halben Kreiſes iſt. In dem erſtern Falle iſt dieſer Widerſtand durch $\frac{2a^3r}{3}$ (0,592), und im zweyten Falle durch $\frac{2a^3r}{3}$ (0,9495) nahebey gegeben.

## §. 43.

Allgemeiner Ausdruck für den Widerſtand der Röhren.

Endlich wollen wir noch den Widerſtand einer Röhre zu berechnen lehren, wenn ſie aus elaſtiſchen Fibern beſteht.

Wir betrachten hierzu die 9te Figur und behalten die Beziehung, wie §. 29. bey. Es iſt nun klar, daß nach Leibnitzens ſowohl, als nach Galilei's Hypotheſe,

die Frage ſich darauf reduciret, von dem Widerſtande eines äußern Zirkels, den wir kennen, den noch zu beſtimmenden Widerſtand eines innern Zirkels abzuziehen.

Die Spannung der Fibern an irgend einem Punkte r in der Linie Pm iſt bekanntlich $\frac{rz}{2a}$ hiernach haben wir alſo für den geſuchten Widerſtand den allgemeinen Ausdruck

$$\frac{r}{3(2a)} sdx (z^3 + A).$$

Nun iſt der Widerſtand des rechtwinkeligen Elements PNpn = o, wenn z = PM; und vollſtändig, wenn z = PN wird. Die allgemeine Formel wird demnach

$$= \frac{r}{3(2a)} sdx \left\{ [b+c+\sqrt{(2cx-x^2)}]^3 - [b+c-\sqrt{(2cx-x^2)}]^3 \right\}$$

$$= \frac{r}{3(2a)} sdx \left\{ 6(b+c)^2 \cdot \sqrt{(2cx-x^2)} + (2cx-x^2)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

Das durch Näherung geſuchte vollſtändige Integral, indem für x = 2c geſetzt wird, iſt

$$\frac{rc^3}{3a} (5{,}899043) (2c^2 + 2bc + b^2).$$

Wird dieſe Größe von dem §. 41 gefundenen Widerſtand des äußern Zirkels, oder von

$$\frac{r}{3} \cdot 8a^3 (0{,}737381) = \frac{r}{3a} \cdot a^4 (5{,}899043)$$

abgezogen, ſo iſt

$$Pf = \frac{r}{3a} (5{,}899043) (a^4 - 2c^4 - 2bc^3 - c^2b^2)$$

der Werth für den Widerſtand der gegebenen Röhre.

§. 44.

Man ſieht, daß dieſer Widerſtand bey gleichen Halbmeſſern a und c größer wird, je kleiner b wird. Er wird alſo ein Maximum ſeyn, wenn $b = o$ iſt, d. h. wenn der innere und äußere Zirkel die Umdrehungsachſe in einem Punkte berühren.

§. 45.

Wie der Widerſtand wird, die Zirkel concentriſch ſind.

Nehmen wir in dem vorſtehenden Ausdrucke $b = a - c$, ſo haben wir den Widerſtand einer Röhre, deren Brechungsebene ein durch zwey concentriſche Zirkel beſchriebener Ring iſt, und erhalten alſo

$$Pf = \frac{r}{3a} (5,899043) (a^4 - a^2 c^2 - a^4).$$

§. 46.

Es ſey allgemein g der Halbmeſſer eines Cylinders, ſo iſt das Verhältniß des Widerſtandes dieſes Cylinders zu dem Widerſtande einer concentriſchen Röhre, deren innerer Halbmeſſer = c, und deren äußerer Halbmeſſer = a iſt, $= g^3 : \frac{a^4 - a^2 c^2 - c^4}{a}$

§. 47.

Einen Cylinder zu finden, deſſen Widerſtande einer Röhre ein gegebenes Verhältniß hat.

Es wird nun leicht ſeyn, den Halbmeſſer g ſo zu beſtimmen, daß der Widerſtand des Cylinders zu dem Widerſtande der Röhre das gegebene Verhältniß von m:n habe. Wir behalten für dieſen Fall

$$g^3 : \frac{a^4 - a^2 c^2 - c^4}{a} = m:n$$

woraus der Werth von g leicht zu finden iſt.

§. 48.

Wenn der Cylinder und die Röhre gleiche Maſſen haben.

Wenn der Cylinder und die Röhre gleiche Maſſen haben; ſo erhalten wir $g^2 = a^2 - c^2$, und das Verhältniß des Widerſtandes iſt folglich $= g^3 : \frac{a^2 g^2 - c^4}{a}$, oder wie $g^3 a : 3 a^2 g^2 - (a^2 + g^4)$.

C

§. 49.

Den Gang, welchen wir genommen haben, den Widerſtand der Röhren zu finden, iſt derſelbe, den man wählen muß, um den Widerſtand einer auf irgend eine Art unterbrochene Brechungsebene zu finden, ſelbſt auch dann noch, wenn dieſe Brechungsebene aus heterogenen Fibern beſteht; nur muß alsdann der eigenthümliche abſolute Widerſtand dieſer verſchiedenartigen Fibern, und ihre relative Lage gegen die Umdrehungsachſe bekannt ſeyn.

Die bisherigen Formeln können dazu dienen, den Widerſtand heterogener Körper zu beſtimmen.

Wenn man alſo das Verhältniß des Widerſtandes der Rinde zu dem Widerſtande des Splintes, oder zu dem gegebenen Widerſtande des Kernholzes wüßte, ſo würde man nach unſerer Formel im Stande ſeyn, den Widerſtand eines noch nicht behauenen Stammes genau zu berechnen.

---

## Von dem Widerſtande der feſten Körper, wenn die Kraft, welche ſie zu zerbrechen ſtrebt, an ihrem äußerſten Ende wirkt. Beſtimmung des Widerſtandes, wenn die Körper an mehreren Punkten unterſtützt ſind, und wenn zu gleicher Zeit an mehreren Punkten ihrer Länge Brüche erfolgen müſſen.

§. 50.

Bey dem Körper ABCDLM (Fig. 1.), deſſen Widerſtand wir bisher zu beſtimmen geſucht haben, wurde angenommen, daß er von einem andern Körper, worin er befeſtigt war, gehalten wurde. Man kann ſich vorſtellen, daß derſelbe Körper, anſtatt auf dieſe Art befeſtiget zu ſeyn, nach ſeiner Umdrehungsachſe auf einer unbiegſamen Linie geſtützt, über dieſe Linie hinaus verlängert und an dieſem andern Ende mit einem Gewichte I dermaßen beſchwert iſt, daß das Moment dieſes neuen Gewichtes (Fig. 10.) gleich iſt, dem Momente des erſtern Gewichtes P. Wenn nun das Gewicht P dem Widerſtande der Brechungsebene ABC, im Falle der feſte Körper eingemauert iſt, das Gleichgewicht hält; ſo iſt es klar, daß dieſes Gewicht, auch für die neue Lage, worin wir den feſten Körper ABCDLM betrachten,

Wie man feſte, zwiſchen ihren beyden Enden unterſtützte und an beyden Seiten des Unterſtützungspunktes beſchwerte Körper anzuſehen habe.

noch immer dieſelbe Wirkung hervorbringen wird: denn die Kräfte I und P ſind gegenſeitig im Gleichgewichte. Für den gegebenen Körper iſt es in Rückſicht der Kraft P vollkommen eben daſſelbe, als wenn alle Theile, die an der, dem Gewichte P entgegengeſetzten Seite der Umdrehungsachſe liegen, an einem andern unbeweglichen Gegenſtande befeſtiget wären, und für die Kraft I gilt ein ähnliches Raiſonnement.

### §. 51.

Wenn alſo ein feſter Körper um eine willkührliche Achſe A C zerbrochen werden ſoll, ſo muß einmahl dieſe Achſe für den Augenblick des Bruches unbeweglich ſeyn; und dann müſſen die brechenden Kräfte ſich im Gleichgewichte erhalten, d. h. ſie müſſen im umgekehrten Verhältniſſe der Hebelarme ſtehen, woran ſie wirken.

### §. 52.

Wenn wir annehmen, daß das an den Hebelarm D T $=$ f hängende Gewicht P mit dem Widerſtande der Brechungsebene A B C, welchen Widerſtand wie allgemein mit B bezeichnen, im Gleichgewichte ſey; ſo haben wir $Pf = B$. Iſt nun das an dem andern Hebelarme DX′ $=$ g hängende Gewicht I mit dem Widerſtande derſelben Brechungsebene A B C ebenfalls im Gleichgewichte, ſo haben wir $I g = B$, und folglich $I = \frac{B}{g}$. Die Summe der Gewichte, welche den Bruch hervorbringen können, iſt alſo $= I + P = \frac{B}{f} + \frac{B}{g} = \frac{B(g+f)}{g f}$, und zwar iſt dieſer Ausdruck allgemein, nach welcher Hypotheſe man auch die Größe B beſtimmen mag.

### §. 53.

**Beſtimmung des Druckes, welchen der Unterſtützungspunkt leidet.**

Die Unterlage, welche den Körper nach der Umdrehungsachſe A C unterſtützt, leidet einen Druck, welcher der Summe der Gewichte I + P gleich iſt. Sie wirkt alſo mit derſelben Kraft, nur in entgegengeſetzter Richtung, auf den Körper wieder zurück. Man kann alſo die Gegenwirkung durch die Wirkung eines Gewichtes R $=$ P + I darſtellen, das in der Brechungsebene von unten nach oben zieht, wenn die Gewichte I und P von oben nach unten ziehen, und umgekehrt.

§. 54.

Wenn wir uns für einen Augenblick die Gewichte I und P weg denken; ſo iſt es klar, daß die Kraft R den Körper von B gegen R heben wird. Wir wollen uns durch die Punkte M und Z in den Grundflächen des feſten Körpers Tangenten an dem Umfange dieſer Grundflächen, und zwar mit der Umdrehungsachſe A C parallel gezogen gedenken. Nehmen wir nun dieſe Tangenten als feſte und unbiegſame Linien an, ſo wird der von der Kraft R gehobene Körper hierdurch unterſtützt und feſt erhalten werden. Sie wirken alſo auf den Körper auf dieſelbe Art zurück, wie die Gewichte I und P bey der erſten Annahme auf ihn wirkten. Die Bedingungen des Gleichgewichtes zwiſchen dem Widerſtande B irgend einer Brechungsebene und den Gewichten I und P, die den Bruch hervor zu bringen ſtreben, ſind für beyde bisher betrachtete Fälle vollkommen dieſelben.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes ſind dieſelben, der Körper mag in der Mitte unterſtützt und an ſeinen beyden Enden beſchwert, oder an den beyden Enden unterſtützt und in der Mitte belaſtet ſeyn.

§. 55.

Alle uns bekannte Körper zerbrechen nur dann, wenn ihre Fibern, oder die Theilchen, woraus ſie beſtehen, um ihre Achſe, über welche der Bruch erfolgen ſoll, ſich um eine gewiſſe Größe ausgedehnt haben. Die Größe dieſer Ausdehnung iſt nach der eigenthümlichen Beſchaffenheit der Körper verſchieden; und ob ſie gleich in manchen Fällen unbemerkbar ſeyn mag, ſo hat ſie doch gewiß jedesmahl Statt, und der Bruch erfolgt nicht eher, als bis die Ausdehnung ihr Maximum erreicht hat. Auf die Richtigkeit dieſes Satzes iſt die Theorie gegründet, welche wir in den nachſtehenden § entwickeln werden.

§. 56.

Es ſey A C F H (Fig. 11.) der vertikale Durchſchnitt eines durch die beyden Unterſtützungspunkte V und Z horizontal erhaltenen feſten Körpers, der über dieſe Unterſtützungspunkte noch unbeſtimmt verlängert iſt. Ferner ſey der Körper zwiſchen dieſen Punkten V und Z mit einem Gewichte P beſchwert, welches mit dem Widerſtande der Brechungsebene B D im Gleichgewichte iſt, und in die Verlängerung dieſer Ebene wirkt. Wir wollen jetzt unterſuchen, was in dem Augenblicke, worin dieſes Gleichgewicht erfolgt, Statt haben wird.

Von dem Widerſtande der feſten Körper, wenn ſie an ihren Enden eingeklemmt ſind.

Das Gewicht P will den feſten Körper A C F H von D nach B bewegen; Unterſtützungspunkte V und Z aber verhindern dieſe Bewegung, und die Theile B D F H und B D A C können dem Beſtreben des Gewichtes P nur dadurch nachgeben, daß ſie ſich um die ihnen correſpondirenden Unterſtützungspunkte V und Z drehen, und dieſe drehende Bewegung erfolgt vermöge der Ausdehnung oder Verlängerung der Fibern von V bis Z jedesmahl gewiß, wodurch alsdenn aus der horizontalen Linie C H die gerade aber gebrochene C′B′H′ wird *).

Wenn die Theile Z F′H′; V A′C′, (von denen wir annehmen, daß ſie nicht ſchwer, und über die Punkte V und Z unbeſtimmt verlängert ſind) ſich frey um dieſe Punkte bewegen können; ſo hat das Gewicht P, wie wir geſehen haben, den Ausdruck, $B \frac{(g+f)}{gf}$, wenn wir nähmlich den Widerſtand der hier durch B D dargeſtellter Brechungsebene B nennen, und B Z = f, ſo wie B V = g ſetzen.

Wenn aber die Theile Z′F′H′ und V′A′C′ des feſten Körpers an ihren Endpunkten mit den Gewichten M und N beſchwert ſind; ſo kann das Gleichgewicht zwiſchen dem Widerſtande der Brechungsebene B D und dem Gewichte P nicht eher Statt haben, als bis das Gewicht P hinlänglich vermehrt iſt, um die Punkte F′ und A′ zu derſelben Höhe zu erheben, zu welcher ſie vor dem Hinzufügen der Gewichte M und N erhoben waren.

Es ſey nun die Entfernung des Gewichtes M von dem Unterſtützungspunkte Z = c; die Entfernung des Gewichtes N von dem Unterſtützungspunkte V ſey = b, wenn nähmlich beyde Entfernungen für den Augenblick des Gleichgewichtes genommen werden. Ferner ſey P′ das Gewicht, welches zu dem Gewichte P hinzugefügt werden muß, damit es hinreichend wird, den Körper A C F H zu zerbrechen. Wird nun von dieſem hinzugefügten Gewichte P′ der eine Theil = p dazu verwendet, dem Gewichte M, und der andere Theil = P′ — p dem Gewichte N das Gleichgewicht

*) Die gebrochene gerade Linie, welche zu unſerm Zwecke hier hinreichend iſt, ſtellt nicht genau die Biegung des feſten Körpers, ſondern die Corden der elaſtiſchen krummen Linie deſſelben dar.

zu halten; ſo iſt es klar, daß $pf = cM$, oder $p = \frac{cM}{f}$; und $P' - p = \frac{bN}{g}$,

und folglich $P \pm P' = B \cdot \frac{(g+f)}{gf} + \frac{cM}{f} + \frac{bN}{g}$ iſt.

Wir bemerken ferner, daß die Gewalt cM und bN als eine Funktion der den Unterſtützungspunkten V und Z correſpondirenden Brechungsebene des gegebenen Körpers ausgedrückt werden kann. Die Buchſtaben m und n bezeichnen zu dem Ende zwey verſchiedne beſtimmte Verhältniſſe; B′ und B″ den Widerſtand der Brechungsebene in V und Z, ſo kann vorſtehender Ausdruck umgeändert werden, wornach man erhält $P + P' = B\frac{(g+f)}{gf} + \frac{mB'}{f} + \frac{nB''}{g}$.

Werden die an den Hebelarmen c und b ziehenden Gewichte M und N ſo angenommen, daß ſie den Körper an den Unterſtützungspunkten V und Z zerbrechen können, ſo haben wir $m = 1 = n$, und die obige Formel gibt

$$P + P' = B\frac{(g+f)}{g.f} + \frac{B'g + B''f}{g.f}.$$

## §. 57.

Wenn der gegebene Körper prismatiſch iſt, ſo iſt $B = B' = B''$, und folglich $P + P' = 2B\frac{(g+f)}{g.f}$. Ferner, iſt alsdann auch $P' = P$, und ſonach muß das Gewicht, welches einen auf ſeinen Unterlagen befeſtigten Körper zerbrechen ſoll, das Doppelte desjenigen Gewichtes ſeyn, welches angewandt werden muß, um denſelben Körper, wenn er ſich auf ſeine Unterlage drehen kann, zu zerbrechen. Dieſes Reſultat ſtimmt mit den von Mariotte in ſeiner Abhandlung über die Bewegung des Waſſers (Traite du mouvement des eaux) mitgetheilten Verſuchen übereinſtimmt.

Vorſtehende Formel für prismatiſche Körper umgeändert.

## §. 58.

Wie groß auch die Gewichte M und N ſeyn mögen, wenn ſie nur größer ſind, als zur Erhaltung des Gleichgewichtes mit dem Widerſtande der Brechungsebenen in V und Z nöthig wäre, ſo iſt es klar, daß der Körper auf den Unterlagen jedes-

Ein an ſeinen Enden eingeklemmter Körper muß bey ſeinen Unterlagen brechen.

mahl brechen muß, wenn das Gewicht, womit er zwiſchen ſeinen beyden Enden belaſtet iſt, groß genug iſt, um hier einen Bruch hervor zu bringen, wobey jedoch angenommen iſt, daß die Fibern, woraus der Körper beſteht, gleichartig ſind.

§. 59.

Wenn der feſte Körper an dem einen Ende eingeklemmt, an dem andern Ende aber frey unterſtützt iſt.

Setzen wir das Gewicht N = o, ſo verwandelt ſich die Formel

$$P + P' = B\frac{(g+f)}{g.f} + \frac{mB'}{f} + \frac{nB''}{g}.$$

in dieſe

$$P + P' = B\frac{(g+f)}{gf} + \frac{mgB'}{gf}.$$

Und für m = 1 wird ſie

$$P + P' = B\frac{(g+f) + B'g}{g.f}.$$

Und wenn der Körper prismatiſch iſt

$$P + P' = B\frac{(g+f)}{g+f}.$$

Dieß iſt der Ausdruck, wodurch wir das Gewicht kennen lernen, welches den Körper zu zerbrechen im Stande iſt, wenn er von Z bis F eingeklemmt, und an dem andern Ende bey V frey unterſtützt iſt.

§. 60.

Unterſuchung über den Widerſtand feſter prismatiſcher Körper, welche auf mehreren gleichweit von einander entfernten Unterlagen ruhen.

Wir wollen jetzt den Widerſtand eines feſten prismatiſchen Körpers kennen lernen, der ſeiner Länge nach durch mehrere, gleichweit von einander entfernte Unterlagen geſtützt, und an ſeinen eingeklemmt iſt.

Es ſey zu dem Ende FSHX (Fig. 12.) ein feſter, prismatiſcher, an ſeinen beyden Enden eingeklemmter, und durch die Unterlagen R, V, Z, T ſo geſtützter

ſeſter Körper, daß die Entfernungen SR, RV, VZ, ZT und TX alle unter einander gleich ſind. Iſt nun dieſer Körper in der Mitte zwiſchen jedem Paare dieſer Unterſtützungen mit den unter ſich gleichen Gewichten Y, N, P, M, Q beſchwert, ſo iſt es gewiß, daß dieſer Körper bey keiner der Unterſtützungen zerbrechen kann, oder es muß für denſelben Augenblick bey jeder Unterſtützung ein Bruch erfolgen. Da ferner jedes der Gewichte Y, N, P u. ſ. w. das Doppelte desjenigen iſt, welches dieſelbe Wirkung hervorbringen würde, wenn die Theile SR, RV, u. ſ. w. des feſten Körpers einzeln, und von einander getrennt wären, ſo daß ſie ſich auf den Unterlagen bloß an ihren Spitzen berührten; ſo folgt hieraus, daß die Summe der Gewichte Y, N, P, die den Körper zerbrechen können, das Doppelte derjenigen Summe iſt, welche man anwenden müßte, um eine Reihe feſter Körper zu zerbrechen, die an ihren Enden auf den Unterlagen R, V, Z, T ſich nur berühren.

Setzen wir allgemein die Anzahl der Unterſtützungen S, R, V, Z u. ſ. w. $= n$; heißt ferner jedes der Gewichte, womit der Körper belaſtet iſt, P; und iſt die ganze Länge des feſten Körpers FH $= l$; ſo iſt es klar, daß die Summe dieſer Gewichte $= P(n-1) = S$ ſeyn wird.

## §. 61.

Verhältniß des Widerſtandes zweyer feſter Körper von gleichen Dimenſionen, die aber durch eine unter ſich verſchiedene Anzahl Unterlagen geſtützt ſind.

Wir wollen jetzt einen andern feſten Körper von denſelben Dimenſionen betrachten, deſſen Anzahl der Unterſtützungen $= m$, und der zwiſchen jedem Paare dieſer Unterſtützungen durch das Gewicht Q belaſtet iſt. Die Summe dieſer Gewichte wird $= Q(m-1) = S'$ ſeyn.

Da aber die Gewichte P und Q umgekehrt wie die Entfernungen der Unterſtützungen ſich verhalten, ſo haben wir

$$P : Q = \frac{l}{m-1} : \frac{l}{m-1} = n-1 : m-1.$$

Folglich iſt $Q = P\frac{m-1}{n-1}$ und wir erhalten

$$S : S' = P(n-1) : P\frac{(m-1)^2}{n-1} = (n-1)^2 : (m-1)^2.$$

Das heißt: der Widerſtand des einen der beyden gleichen und auf dieſe Art unterſtützten feſten Körper verhält ſich zu dem Widerſtande des andern feſten Körpers, wie die Quadraten der Anzahl der Unterſtützungen weniger eine.

§. 62.

In welchem Falle die Anzahl der Unterſtützungen unendlich iſt.

Wenn n endlich groß angenommen wird, ſo haben wir den Fall, wo der gegebene feſte Körper ſeiner ganzen Länge nach durch eine feſte und unbewegliche Ebene unterſtützt iſt. Man ſieht wohl, daß alsdann der Widerſtand unendlich werden muß.

§. 63.

Verhältniß des Widerſt. derſelben feſten Körper als eine Funktion der Brechungspunkte.

Die eben betrachteten feſter Körper zerbrechen in einem Augenblick nicht bloß auf ihren Unterſtützungen, ſondern auch an den verſchiednen Punkten, woran die Gewichte hangen. Nennen wir alſo n′ und m′ die Anzahl der Brüche, die erfolgen, ſo haben wir $n' = n + n - 1$ und $m' = m + m - 1$

dieß gibt

$$n = \frac{n' + 1}{2} \text{ und } m = \frac{m' + 1}{2}.$$

Wer dieſe Werthe von n und m in die Proportion § 61 geſetzt, ſo wird

$$S : S' = \frac{(n' - 1)^2}{2} : \frac{(m' - 1)^2}{2}.$$

Man ſieht alſo, daß der Widerſtand ſolcher feſter Körper, wie wir hier betrachtet haben, ſich verhält, wie die Quadrate der Anzahl der erfolgenden Brüche weniger eins.

## Von dem Widerſtande ähnlicher feſter Körper, und von ſolchen feſten Körpern, die der Wirkung ihres eigenen Gewichtes widerſtehen.

§. 64.

Worin die Hypotheſen Galilei's und Leibnitzens übereinſtimmen.

Die Formel über den Widerſtand der feſten Körper, zu welchen wir durch die Hypotheſen Galilei's und Leibnitzens gelangt ſind, ſtimmen darin überein, daß der Widerſtand rectangulärer Brechungsebenen nach beyden Hypotheſen ſich wie die Quadrate ihrer Höhen, multiplicirt durch ihre Breiten, ſich verhalten.

§. 65.

Wir haben gefunden, daß das Gewicht P, welches im Stande iſt, ein gegebenes Prisma zu zerbrechen, nach der erſten Hypotheſe $= \frac{rah^2}{2}$ und nach der zweyten $= \frac{rah^2}{3}$ iſt. Die Größen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, womit dieſe Ausdrücke multiplicirt ſind, die durch Verſuche beſtimmt werden müſſen, ſind für feſte Körper derſelben Art unveränderlich, und hangen nicht von den Dimenſionen der Körper ab. Wenn es alſo nicht nöthig iſt, den eigentlichen Werth des Gewichtes P, ſondern nur die Funktion der Dimenſionen des feſten Körpers, welcher dieſes Gewicht proportional iſt, zu beſtimmen, und dieß wird für unſern Zweck in der Folge hinreichend ſeyn; ſo können wir dieſe Coefficienten außer Acht laſſen. Betrachten wir alſo bloß das Verhältniß der brechenden Kraft zu dem Widerſtande der feſten Körper, ſo werden diejenigen Reſultate hinlänglich ſeyn, zu welchen wir für rechtwinkelige Brechungsebenen nach beyden Hypotheſen gelangt ſind.

§ 66.

Verhältniß des Widerſtandes zweyer ähnlichen Körper.

Die beyden ähnlichen Körper A B C D und A′ B′ C′ D′ (Fig. 13.) werden durch eine vertikale Unterſtützung A′ B horizontal erhalten, und ſeyn an ihren Enden mit den Gewichten P und P′ beſchweret. Es ſoll das Verhältniß dieſer Gewichte gefunden werden.

Es ſey zu dem Ende für den erſten Körper: h die Höhe der Brechungsebene; a die Breite derſelben, und f die Länge AD. Für den zweyten Körper ſeyn die correſpondirenden Dimenſionen mit h′, a′ und f′ bezeichnet.

Wenn zwiſchen dem Widerſtande der Brechungsebenen AB, A′ B′ und den Gewichten P, P′; ſo haben wir

$$P = \frac{ah^2}{f};\ P' = \frac{a'h'^2}{f'},$$ woraus wir finden

$$P : P' = \frac{ah^2}{f} : \frac{a'h'^2}{f'}$$

Aber vermöge der Vorausſetzung haben wir

$$ah : a'h' = h^2 : h'^2 \text{ und } f : f' = h : h'$$

Demnach iſt alſo

$$P : P' = h^2 : h'^2 = a^2 : a'^2 = f^2 : f'^2.$$

Sonach verhält ſich der Widerſtand der Brechungsebenen ähnlicher Prismen, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Dimenſionen.

Auf dieſe Weiſe kann man ebenfalls nach beyden Hypotheſen beweiſen, daß der Widerſtand ähnlicher feſter Körper, wie auch ihre Brechungsebenen ſeyn mögen, jedesmahl dem Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten proportional iſt.

## §. 67.

Verhältniß der Längen zweyer feſter Körper mit ähnlichen Brechungsebenen, wenn ſie den Wirkungen ihres eignen Gewichtes widerſtehen können.

Wir nehmen an, daß die Brechungsebenen der hier zu betrachtenden Körper ſich ähnlich ſind, und ſuchen das Verhältniß, welches zwiſchen ihren Längen Statt finden muß, wenn ihre eigenen Gewichte, und der Widerſtand der Brechungsebenen im Gleichgewichte ſeyn ſollen.

Der Mittelpunkt der Schwere dieſer feſten Körper muß als der Anhängepunkt ihres Gewichtes angeſehen werden, und wenn die Entfernung deſſelben von der Brechungsebene durch $\frac{f}{2}$ gegeben iſt, ſo haben wir

$$ah^2 : a'h'^2 : \frac{ahff}{2} : \frac{a'h'f'f'}{2}$$

Und folglich

$$h : h' = f^2 : f'^2 .$$

Aus dieſer Proportion ergiebt ſich, daß wenn zwey Körper mit ähnlichen Brechungsebenen eine ſolche Länge haben, daß die Wirkung ihres eigenen Gewichtes im Gleichgewichte oder in einem gegebenen Verhältniſſe mit dem Widerſtande der Brechungsebenen ſtehen, daß alsdann dieſe Körper ſich nicht ähnlich ſind. Denn wenn dieſes ſeyn ſollte, ſo mußte $h : h' = f : f'$ ſeyn, da wir hingegen gefunden haben $h : h' = f^2 : f'^2$.

Unter einer unendlichen Anzahl ähnlicher und homogener Körper kann nur ein einziger ſeyn, deſſen eigenes Gewicht mit dem Widerſtande der Brechungsebenen im Gleichgewichte iſt. Alle übrigen von größerer Länge zerbrechen; wenn aber die Länge kleiner iſt, ſo wird der Widerſtand der Brechungsebene zu groß ſeyn *).

## §. 68.

Wenn alſo das größte Gewicht, welches ein prismatiſcher Körper von gegebenen Dimenſionen an dem einem ſeiner Enden zu erhalten im Stande iſt, gegeben iſt, und wenn ferner das ſpeciſiſche Gewicht deſſelben bekannt iſt: ſo iſt es leicht, die Länge zu finden, welche man dieſem Körper geben muß, wenn die Wirkung des eigenen Gewichtes mit dem Widerſtande der Brechungsebene im Gleichgewichte ſeyn ſoll.

Ausdruck für die Länge eines feſten prismatiſchen Körpers, wenn er ſeinem eigenen Gewichte widerſtehen ſoll.

Es ſey zu dem Ende: a die Breite der Brechungsebene; h die Höhe derſelben; f die Länge des Hebelarmes, an deſſen Ende das Gewicht P angebracht iſt, und endlich ſey z die geſuchte Länge; ſo erhalten wir $a h^2 = P f = \frac{a h z^2}{2}$, folglich $\frac{z^2}{2} = h$. Man kann nun das Gewicht P durch ein Prisma von derſelben Materie,

*) Dieſer Satz iſt zuerſt von Galilei demonſtrirt, und in dem zweyten ſeiner Geſpräche enthalten.

woraus der feſte Körper beſteht, darſtellen, deſſen Grundfläche der Rectangel ab, und deſſen Höhe $= c$ iſt. Dies gibt alsdenn $P = abc$ und $\frac{ahz^2}{2} = abcf$, folglich $z = \sqrt{(2fc)}$.

---

## Von dem Widerſtande feſter prismatiſcher Körper, wenn die brechende Kraft unter einem ſchiefen Winkel auf die Länge der Fibern wirkt.

### §. 69.

Verhältniß des Widerſtandes ein und deſſelben Körpers, wenn er unter einem auf die Fibern ſchiefen oder ſenkrechten Winkel belaſtet iſt.

Bisher haben wir unterſucht, wie feſte Körper widerſtehen, wenn ein Gewicht, das ſenkrecht auf die Länge der Fibern wirkt, ſie zu zerbrechen ſtrebe. Wenn aber die Richtungen dieſes Gewichtes und der Fibern nicht ſenkrecht auf einander ſind, ſo iſt es klar, daß man bey der Schätzung der Kraft, auf die Größe dieſes ſchiefen Winkels Rückſicht nehmen muß.

Es ſey die gerade Linie F I (Fig. 14.) die vertikale Kraft des Gewichtes P. Wird dieſe Kraft in zwey andere zerlegt, wovon die eine I C parallel mit der Richtung B F der Fibern des feſten Körpers, und die andere F C ſenkrecht auf dieſelbe Richtung iſt; ſo iſt es einleuchtend, daß dieſe letzte Kraft es eigentlich iſt, welche den Bruch verurſacht, indem die erſte Kraft den Körper entweder feſter in die Unterſtützung BK hinein zu drücken, oder auch herauszuziehen ſtrebt, je nachdem der Winkel KBF ſpitz oder ſtumpf iſt.

Es ſey das Gewicht, welchem ein gegebener feſter Körpee widerſtehen kann, wenn er ſenkrecht auf die Richtung des Gewichtes eingeklemmt iſt $= P$, und der Hebelarm, an deſſen Ende dieſes Gewicht zieht $= f$; ferner ſey $P'$ die Laſt, welche derſelbe feſte Körper erhalten kann, wenn er unter den Winkel K B F eingeklemmt iſt, und die Länge K F ſeines Hebelarmes heiße alsdann $f'$. Der ſin. tot. $= 1$, und der Winkel KBF $= b$. Für die horizontale Lage haben wir alsdann $P = \frac{ah^2}{f}$.

Wenn der Körper gegen den Horizont geneigt iſt, ſo erhalten wir die Kraft FC, die ihn zu zerbrechen ſtrebt, durch die Proportion

$P' : FC = 1 : \text{ſin. b.}$ dieß giebt $FC = P' \text{ ſin. b.}$

dieſe Kraft wirkt an den Hebelarm

$KF = f'$; folglich iſt $f : f' = 1. \text{ ſin. b.}$

Man hat alſo

$$a h^2 = P' f (\text{ſin. b.})^2 = P f.$$

Und folglich

$$P' : P = : (\text{ſin. b})^2 ;$$

Da man nun das Gewicht P leicht beſtimmen kann, welches mit dem Widerſtande der Brechungsebene für den Fall im Gleichgewichte iſt, wenn die Richtung deſſelben ſenkrecht auf die Richtung der Fibern iſt, woraus der Körper beſteht; ſo kann man vermittelſt der vorſtehenden Proportion das Gewicht P′, welches ebenfalls mit dem Widerſtande dieſer Brechungsebenen im Gleichgewichte iſt, finden, der Winkel, der die Richtung dieſes Gewichtes mit den Fibern einſchließt, mag ſeyn, wie er will.

## §. 70.

Wenn wir nicht von der Schwere des feſten Körpers abſtrahiren, ſo müſſen wir den Mittelpunkt der Wirkung ſeines eigenen Gewichtes und des an ſeinem Ende hängenden ſuchen. Iſt der Anhängepunkt G für ihre Summe gefunden, ſo muß die Linie KN anſtatt des Hebelarmes KF geſetzt werden, wodurch dieſe Frage alſo auf den vorigen Artikel zurück geführt wird.

Wie man auf das eigene Gewicht eines feſten Körpers in dem Ausdrucke für den Widerſtand Rückſicht nehmen muß.

## §. 71.

Nach der Proportion $P : P' = (\text{ſin. b})^2 : 1$ erhält man $P' = \frac{P}{(\text{ſin. b})^2}$, woraus ſich alſo ergiebt, daß das brechende Gewicht größer werden muß, je kleiner der ſin. des Neigungswinkels wird, ſo daß dieſes Gewicht zuletzt unendlich werden müßte, wenn der widerſtehende feſte Körper, deſſen Dimenſionen übrigens ſeyn mögen, wie ſie wollen, vertikal wird.

## §. 72.

*In welchem Fälle die vorſtehende Formel nicht hinreicht.*

Wenn die Fibern der feſten Körper wirklich ſo wären, wie wir angenommen haben; ſo folgte aus dem Vorhergehenden, daß keine Kraft, wie groß ſie auch ſeyn möchte, wenn ſie nach der Richtung ihrer Länge wirkte, im Stande ſeyn würde, den Körper zu zerbrechen, ſondern daß ſie ihn bloß bis auf einen gewiſſen Punkte zuſammen drücken können.

Aber alle Körper, die uns bekannt ſind, und aus Fibern beſtehen, die weder vollkommen gleichartig, noch genau parallel mit einander ſind, biegen ſich und brechen, wenn ſie von einem gewiſſen beſtimmten Gewichte parallel mit ihrer Länge gedrückt werden. Hieraus folgt alſo nun, daß die §. 69 gefundene Formel zur Berechnung des Widerſtandes, wenn derſelbe nicht wirklich relativ iſt, nicht gebraucht werden kann. Wir müſſen alſo zu neuen Principien unſere Zuflucht nehmen, um die Geſetze für dieſe Art von Widerſtand, welche in der Baukunſt häufig vorkommt, kennen zu lernen.

## §. 73.

*Was wir unter abſolut negativen Widerſtand verſtehen.*

Abſoluten Widerſtand haben wir denjenigen genannt, welchen ein Körper leiſtet, wenn die Fibern, woraus er beſtehet, durch ein Kraft, parallel mit ihrer Länge, angeſpannt werden, ſo daß dieſe Kraft bemüht iſt, ſie zu verlängern. Abſolut negativen Widerſtand nennen wir nun denjenigen, welchen ein Körper leiſtet, deſſen Fibern parallel mit ihrer Länge der Wirkung einer Kraft ausgeſetzt ſind, die ſie zuſammen zu drücken ſtrebt.

## §. 74.

Die Grenze des abſolut negativen Widerſtandes der feſten Körper iſt nicht dasjenige Gewicht, welches im Stande iſt, ſie zu zerbrechen; ſondern dasjenige, bey welchem ſie anfangen ſich zu biegen. Denn von dem Augenblicke an, wo auch nur die kleinſte Biegung erfolgt iſt, wird der Widerſtand relativ, und kann nach den obigen Formeln berechnet werden. Die Frage, welche wir abzuhandeln haben, reducirt ſich alſo dahin: ein Verhältniß für Gewichte zu finden, welche, wenn ſie feſte Körper von gegebenen Dimenſionen parallel mit ihrer Länge zuſammen drücken, im Stande ſind, ſie zu biegen.

## §. 75.

*Die Geſetze für dieſen Widerſtand hat Euler gelehrt.*

Muſchenbroeck war ſchon durch Verſuche zu der Beſtimmung dieſes Verhältniſſes gelangt *). Euler leitet es als Zuſatz aus mehreren vortrefflichen Lehrſätzen von den elaſtiſchen krummen Linien ab. Wir werden dieſem großen Geometer folgen, um zu denſelben Demonſtrationen zu gelangen, und wollen deshalb die erſten Seiten ſeiner Abhandlung de curvis elaſticis **) wörtlich überſetzen.

---

## Ueber die elaſtiſchen krummen Linien. Allgemeine Formel von dem abſolut negativen Widerſtande der feſten Körper.

## §. 76.

Die elaſtiſche Linie B A (Fig. 15.) ſey in einer unbeweglichen Ebene in B ſo befeſtiget, daß die Lage ihrer Tangente in B beſtimmt iſt. An dem Ende A dieſer Linie ſey die biegſame Linie A C befeſtigt, worauf die Kraft C D $=$ P ſenkrecht wirkt, und dahin ſtrebt, der elaſtiſchen Linie die Krümmung B M A zu geben. Wir nehmen nun die Verlängerung dieſer Linie A C für die Achſe, und machen A C $= c$; A P $= x$ und P M $= y$.

Wenn die Linie B A ihre Elaſticität in dem Puncte M auf einmahl verlöhre und vollkommen biegſam würde, ſo würde die Wirkung des Gewichtes ſie zu biegen ſeyn $= P(c + x)$; weil nun aber dieſe Biegung, wenn die Linie wirklich elaſtiſch iſt, nicht Statt hat, ſo muß die Elaſticität mit dem Momente $P(c + x)$ im Gleichgewichte ſeyn. Dieſe Kraft aber hängt nicht bloß von der Natur der Linie ab, welche wir in ihrer ganzen Länge als homogen annehmen; ſondern ſie hängt auch von der an

---

*) Phyſicae experimentales et Geometricae diſſertationes, (Lugduni Batavorum 1729).

**) De curvis elaſticis (Lauſanne 1744), ſpäter in dem Werke: Methodus inveniendi lineas curvas, etc.

dem Punkte M ſtatthabenden Krümmung ab. Denn die Gewalt, womit die elaſtiſchen Körper ſich wieder in ihren natürlichen Zuſtand zu verſetzen ſtreben, iſt der Kraft, womit ſie zuſammengedrückt oder auch ausgedehnt werden, proportional. Das Moment der Elaſticität, oder die Schnellkraft einer Linie in irgend einem Punkte ihrer Länge iſt um ſo größer, je mehr ihre Fibern ausgedehnt oder zuſammen gedrückt ſind, d. h. je größer die Krümmung daſelbſt iſt. Dieſes Moment verhält ſich alſo umgekehrt wie der Krümmungshalbmeſſer der elaſtiſchen Linie an dieſem Punkte.

Nennen wir alſo E K K die abſolute Elaſticität der Linie, welche von der Natur und der Lage der Elemente woraus ſie beſteht, abhänge; iſt ferner R der Krümmungshalbmeſſer an dem Punkte M: ſo wird die Kraft, womit die Linie A B der Kraft P widerſteht, wenn d x als unveränderlich angenommen wird, =

$$\frac{EKK}{R} = - \frac{EKK\, dx\, ddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Und da zwiſchen dieſer Kraft und dem Momente des Gewichtes P ein Gleichgewicht iſt, ſo erhält man die Gleichung

$$P(c + x) = - \frac{EKK\, dx\, ddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Welche, wenn ſie mit dx multiplicirt wird, integrabel wird, und gibt

$$P\left(\frac{x^2}{2} + cx + f\right) = - \frac{EKK\, dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}.$$

Man erhält demnach

$$dy = \frac{-P\left(\frac{x^2}{2} + cx + f\right) dx}{\sqrt{\left\{E^2 K^4 - P^2 \left(\frac{x^2}{2} + cx + f\right)^2\right\}}}$$

Durch dieſe Gleichung läßt ſich die Figur der elaſtiſchen Linie B A, die durch das Gewicht P gekrümmt wird, verzeichnen.

## §. 77.

Allgemeinere Gleichung für dieſe krummen Linien.

Die Gleichung

$$dy = \frac{(m + nx + qx^2)\,dx}{\sqrt{(a^4 - (m + nx + qx^2)^2)}}$$

hat offenbar dieſelbe Form, als die, welche wir eben gefunden haben, und gehört allgemein allen möglichen elaſtiſchen Linien an, je nachdem die beſtändigen Größen a, m, n, q verſchiedene Werthe haben.

## §. 78.

Werth der Größen P, c, f, wenn die Figur der elaſtiſchen Linie gegeben iſt.

Wenn wir annehmen, daß dieſe beſtändigen Größen für einen beſondern Fall beſtimmt ſind, ſo kann man die Kraft, welche im Stande iſt, der Linie A M B die Figur zu geben, durch die Formel

$$dy = \frac{(m + nx + qx^2)\,dx}{\sqrt{(a^4 - (m + nx + qx^2)^2)}}$$

finden, indem wir immer annehmen, daß die abſolute Elaſticität dieſer Linie durch EKK ausgedrückt iſt.

Man braucht zu dieſem Ende nur den Zähler und Nenner des zweyten Gliedes mit $\frac{EKK}{a^2}$ zu multipliciren, ſo wird

$$dy = \frac{\frac{EKK}{a^2}(m + nx + qx^2)\,dx}{\sqrt{(E^2K^4 - \frac{E^2K^4}{a^4}(m + nx + qx^2)^2)}}$$

Vergleicht man nun Glied vor Glied dieſer Gleichung, mit derjenigen, welche wir oben gefunden haben, ſo erhält man

$$-\frac{P}{2} = \frac{EK^2q}{a^2}\,;\; -Pc = \frac{EK^2n}{a^2}$$

$$\text{und } -Pf = \frac{EKKm}{a^2}.$$

Alſo die Kraft P, welche die Krümmung der Linie hervorbringt, iſt

$$= -\frac{2EK^2 q}{a^2},$$

die Entfernung $AC = c = \frac{n}{2q}$,

und die Conſtante $f = \frac{m}{2q}$.

Damit nun die an ihrem Ende B befeſtigte elaſtiſche Linie AC die Krümmung ABM annimmt, deren Natur durch die Gleichung

$$dg = \frac{(m + nx + qx^2)\,dx}{\surd(a^4 - [m + nx + qx^2]^2)}$$

ausgedrückt iſt, ſo muß, wenn man die Entfernung $= \frac{n}{2q}$ nimmt, dieſe Linie nach der Richtung CD, perpendikulär auf dieſe Achſe AP durch eine Kraft $P = -\frac{2EK^2}{a^2}$, gebogen werden, welche nach der in der Figur gezeichneten entgegengeſetzten Richtung ziehen muß, wenn q eine poſitive Größe iſt.

Weil, wie wir § 76 geſehen haben, $\frac{EK^2}{R}$ = dem Momente der Kraft P iſt, ſo folgt daraus, daß der Ausdruck $\frac{EK^2}{a^2}$ mit einem gewiſſen Gewichte P′ homogen und leicht zu beſtimmen iſt, wenn die abſolute Elaſticität EKK bekannt iſt. Wir haben alſo $P : P' = 2q : 1$.

## § 79.

Werthe verſchiedener Kräfte, welche einen Theil der elaſtiſchen Linie in eine gegebene krumme Linie erhalten ſollen.

Nach dem was wir bisher geſagt haben iſt es leicht, die Kraft anzugeben, welche erforderlich iſt, dem Theile BM einer elaſtiſchen Linie ſeine Krümmung zu erhalten, wenn wir den andern Theil AM als gar nicht vorhanden anſehen. Wir nehmen demnach an, daß die elaſtiſche Linie BM ſich in eine ſtraffe und vollkommen unbiegſame Linie MT endige, die ſo mit der erſtern verbunden ſey, daß, welche

Neigung ſie auch annehme, dieſe immer ihre Tangente an dem Punkte M bleibe. Wird dieſes angenommen, ſo iſt es klar, daß, um dem Theile B M die Krümmung zu erhalten, an der Linie M T in N eine Kraft $= -\frac{2EKKq}{aa}$ angebracht werden muß, deren Richtung perpendikulär auf die Achſe A P durch den Punkt C geht, wobey C ſo zu nehmen iſt, daß A C $= \frac{n}{2q}$ iſt. Die Entfernung N M wird folglich

$$\frac{ds}{dx} CP = \frac{ds}{dx}\left(\frac{n+2qx^2}{2q}\right) = \frac{a^2}{\sqrt{(a^4-[m+nx+qx^2]^2)}}\left(\frac{n+2qx}{2q}\right)$$

Wird die Kraft ND $= -\frac{2EK^2q}{a^2}$ in zwey andere zerlegt, in die normale N Q und in die tangentiale N T, ſo haben wir für die erſte $-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{2EK^2q}{a^2}$, und für die zweyte $-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{2EK^2q}{a^2}$.

Wenn man ſich jetzt den Theil B M der elaſtiſchen Linie weg denkt, ſo daß nur der Theil M A bleibt, der, wie zuvor, nach der Richtung C D durch eine Kraft $= -\frac{2EK^2q}{a^2}$ gebogen wird; ſo muß, wenn dieſe Krümmung erhalten werden ſoll, an dem noch immer an der unbiegſamen Tangente M N befeſtigten Ende M ebenfalls eine Kraft $= -\frac{2EK^2q}{a^2}$, die an dem Punkte N angebracht iſt, und zwar nach einer Richtung wirken, die derjenigen, welche wir in dem vorhergehenden Falle gefunden haben, gerade entgegengeſetzt iſt. Die Kräfte an den beyden Enden einer elaſtiſchen Linie müſſen ſich aufheben, und folglich müſſen ſie in gleichen aber entgegengeſetzten Richtungen wirken. Wäre dieſes nicht, ſo würde der ganze Faden irgend eine Bewegung anzunehmen ſuchen, welches man alsdann nur dadurch würde verhindern können, daß man eine neue Kraft anwendete, welche im Stande wäre, unter den ſchon vorhandenen das Gleichgewicht wieder herzuſtellen. Man kann demnach mit der größten Leichtigkeit die Kräfte beſtimmen, welche, indem ſie auf

irgend einen Theil der elaſtiſchen Linie wirken, im Stande ſeyn werden, dieſem Theile die anfängliche Krümmung zu erhalten.

## §. 80.

Beſtimmung der Tangente von dem Anfangspunkte der Coordinaten an gerechnet.

Es ſey A M (Fig. 16.) eine elaſtiſche Linie, an den Punkten M und A ſeyn zwey unbiegſame Linien M N und A D befeſtigt, worauf zwey gleiche Kräfte in den gerade entgegengeſetzten Richtungen D E und N R wirken, die ſich alſo gegenſeitig das Gleichgewicht halten, und der elaſtiſchen Linie die Krümmung A M geben, deren Gleichung gefunden werden ſoll.

Es ſey deshalb die gerade Linie A P, die durch den Punkt A geht, und ſenkrecht auf die Richtung der Fibern D E und N R iſt, die Achſe. Die abſolute Elaſticität werde immer = E K K genommen; ferner ſmache man den ſinus des Winkels C A D, der durch die A P und Tangente A D entſteht, = $\mu$; den coſinus deſſelben Winkel = $\omega$; den ſinus tot. = 1. Iſt endlich die Entfernung A c = c; die Kraft D E = N R = P; A P = x und P M = y, ſo wird die Gleichung für die krumme Linie (§ 76)

$$dy = \frac{-P\,dx\,(\frac{1}{2}x^2 + cx + f)}{\sqrt{(E^2K^4 - P^2[\frac{1}{2}x^2 + cx + f]^2)}}$$

Für x = o wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{\omega} = -\frac{Pf}{\sqrt{(E^2K^4 - P^2f^2)}} = \frac{\mu}{\sqrt{(1-\mu\mu)}}$$

Woraus man den Werth f findet, und die krumme Linie iſt alſo für dieſen beſondern Fall beſtimmt.

## §. 81.

Was aus der allgem. Gleichung für den Fall wird, wenn die Kraft an dieſem Anfangspunkte angebracht iſt.

Die allgemeine Gleichung für elaſtiſche Curven iſt nach § 77

$$dy = \frac{(m + nx + qx^2)^2}{\sqrt{(a^4 - [m + nx + qx^2]^2)}}$$

Wenn man annimmt, der Anfangspunkt der Coordinaten ſey um die Größe $\frac{n}{2q}$ zurück geſchoben, und indem man $q = 1$ ſetzt; ſo muß man in die vorige Gleichung $x - \frac{n}{2}$ ſtatt x ſetzen. Die Formel wird alsdann einfacher

$$dy = \frac{(m \mp x^2)\,dx}{\sqrt{(a^4 - [m \mp x^2]^2)}}$$

Weil aber

$$a^4 - (m \mp x)^2 = (a^4 - m - x^2)(a^2 \mp m + x^2)$$

iſt, ſo können wir $a^2 - m = cc$ ſetzen, da denn c eine neue unveränderliche Größe iſt. Wir erhalten dann $m = a^2 - c^2$, und wenn dieß ſubſtituirt wird,

$$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{[(c^2 - x^2).(2a^2 - c^2 \mp x^2)]}}$$

Eine Gleichung, wodurch die Natur der krummen Linie A M C (Fig. 17.) beſtimmt wird, wenn man nähmlich $AP = x$ und $PM = y$ ſetzt.

Weil die Größe n ſich in dieſer Formel nicht befindet, ſo ſchließt man daraus, daß die Richtung der Kraft, wodurch die Curve erzeugt wird, in A perpendikulär auf A P ſeyn muß. Sie wird alſo durch A D dargeſtellt werden können.

## §. 82.

Wenn man $x = 0$ ſetzt, ſo hat man $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - c^2}{c\sqrt{(2a^2 - c^2)}}$ als den Werth der Tangente des Winkels, welchen die Curve AM an dem Punkte A mit der Achſe AP macht. Der Sinus dieſes Winkels wird alſo $= \frac{a^2 - c^2}{a^2}$. Wird nun a unendlich groß angenommen, ſo wird $\frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1$; die Linie an dem Punkte A wird die Normale der Achſe A P ſeyn, und, weil die Kraft $\frac{2\,EK^2}{a^2}$ verſchwindet, nicht gekrümmt ſeyn. In dieſem Falle erhalten wir alſo die gerade

Unter welchen Umſtänden die elaſtiſche Curve eine gerade Linie wird.

Linie AB, welche, an beyden Seiten der Achſe AP unendlich verlängert, die erſte Art von elaſtiſchen Curven darſtellt. Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen über die Natur dieſer krummen Linie machen.

§. 83.

Wodurch die verſchiedenen Arten der elaſtiſchen Krümmungen beſtimmt werden.

Man ſieht gleich, daß der Winkel P A M, welchen die elaſtiſche Linie mit der Achſe A P an dem Punkte A macht, abnimmt, wenn die Größe a a kleiner wird, d. h. je größer die Kraft wird, welche die Krümmung hervorbringt, und daß für $a^2 = c^2$ die Achſe A P ſelbſt die Tangente der Krümmung an dem Punkte A wird. Wenn $a^2$ kleiner als $c^2$ iſt, ſo wird die Krümme A M unter dieſer Achſe ſich über dieſelbe erheben, bis $a^2 = \frac{c^2}{2}$ wird, wo alsdann die Tangente an A ſich mit der geraden Linie A b confundirt. Wenn man aber $a^2$ kleiner als $\frac{1}{2} c^2$ annimmt, ſo wird der Winkel P A M imaginär, und die Krümmung wird nicht durch den Punkt A gehen.

Durch dieſe verſchiedenen Verhältniſſe zwiſchen den unveränderlichen Größen a und c werden die verſchiedenen elaſtiſchen Krümmungen beſtimmt.

§. 84.

Figur und Zug dieſer Curve aus ihrer allgemeinen Gleichung abgeleitet.

Da die allgemeine Formel dieſer Linie ſich nicht verändert wenn die Coordinaten x und y beyde negativ angenommen werden; ſo folgt daraus, daß ſie aus den zweyen ähnlichen Zweigen A M C und A m c beſteht, die ſich gleich und einander entgegengeſetzt ſind, ſo daß der Punkt A ein Biegungspunkt iſt. Wenn alſo der Theil A M C bekannt iſt, ſo iſt es die Verlängerung A m c über dem Punkte A ebenfalls; wird alſo $Ap = AP$ genommen, ſo iſt $pM = PM$. Je weiter jede dieſer beyden Zweige ſich von dem Punkte A entfernt, deſto weiter entfernt er ſich auch von der Abſciſſe, bis $x = AC = c$, und die correſpondirende Ordinate E C die Tangente dieſer Curve wird, weil für $x = c$ das $\frac{dy}{dx}$ = unendlich wird.

Nun iſt es klar, daß die Abſciſſe x nicht größer als c werden kann, denn ſonſten müßte $\frac{dy}{dx}$ imaginär werden. Die ganze krumme Linie wird alſo zwiſchen

den beyden äußerſten Coordinaten E C und e c, wie zwiſchen zwey Grenzen eingeſchloſſen ſeyn, welche ſie nicht überſchreiten kann. Jetzt kennen wir alſo ſchon zwey Zweige A C und A c dieſer krummen Linie, welche ſich von beyden Seiten des Punktes A bis zu ihren reſpektiven Grenzen ſich erſtrecken.

## §. 85.

Wir wollen jetzt den Zug dieſer krummen Linie über die Punkte C und c kennen lernen. Dieſe krumme Linie hat eine unendliche Anzahl paralleler und gleichweit von einander entfernten Halbmeſſer.

Nehmen wir die mit A E parallele gerade Linie C D für die Achſe, und für die neuen Coordinaten $CQ = t$; $QM = u$, ſo erhalten wir

$t + x = AE = c$, und $y + u = CE = AD = b$

Ferner $x = c - t$; $y = b - u$, und folglich $dy = - du$; $dx = - dt$. die Subſtitution dieſer Werthe in die Formel gibt für die Coordinaten $t$ und $u$ dieſe Gleichung

$$du = \frac{(a^2 - 2ct + t^2)\,dt}{\sqrt{(t[2c - t][2a^2 - 2ct + t^2])}}.$$

Wird nun $t$ unendlich klein angenommen, ſo hat man $du = \frac{a^2\,dt}{2a\sqrt{(ct)}}$,

oder, wenn wir dieſe Gleichung integriren, $u = a\sqrt{\frac{t}{c}}$, welche anzeigt, daß die Krümmung von C nach N eben ſo iſt, wie von C nach M. Da $\sqrt{\frac{t}{c}}$ poſitiv und negativ ſeyn kann; ſo ſieht man auch hieraus ſchon, daß auch die Ordinate $u$ poſitiv und negativ ſeyn kann. C D iſt alſo ein Halbmeſſer der krummen Linie, und der Bogen C N B iſt gleich und ähnlich dem Bogen C M A.

## §. 86.

Die durch den Punkt c mit der Achſe A E parallel gezogene gerade Linie c d wird ebenfalls ein Halbmeſſer der krummen Linie ſeyn, weil der Aſt A c b gleich und ähnlich iſt dem Aſte A C B. Die Punkte B und b werden alſo ebenfalls, wie der

Punkt A, Biegungspunkte ſeyn; woraus denn erhellet, daß dieſe krumme Linie ſich auch noch über dieſe Punkte hinaus erſtrecken wird. Sie wird alſo eine unendliche Anzahl Halbmeſſer CD, c d u. ſ. w. haben, die alle in der Entfernung D d parallel mit einander ſeyn werden. Sie ſelbſt, die krumme Linie, wird aus einer unendlichen Anzahl gleicher und ähnlicher Theile beſtehen, ſo daß wenn ein einziger dieſer Theile AMC bekannt iſt, man auch die ganze Linie kennt.

§. 87.

An welchen Punkten ihre Krümmung ein Maximum oder ein Minimum iſt.

Da in A ein Biegungspunkt iſt, ſo muß der Krümmungshalbmeſſer daſelbſt unendlich groß ſeyn, wie ſich dieß aus der Natur der krummen Linie ergibt; denn indem in A eine Kraft $\frac{2EK^2}{a^2}$ nach der Richtung AD wirkt, ſo hat man, wenn der Krümmungshalbmeſſer R heißt, $\frac{2EK^2x}{a^2} = \frac{EK^2}{R}$, und folglich $R = \frac{a^2}{2x}$, oder R = unendlich, wenn x = o iſt.

§. 88.

Der den Punkten C und c correſpondirende Krümmungshalbmeſſer wird ſeyn $= \frac{a^2}{2c}$, weil AE = Ae = c iſt, und der dieſe Punkte der krummen Linie von der geraden Linie BAb am entlegenſten ſind, ſo wird die Krümmung hier ſelbſt ein Maximum ſeyn.

§. 89.

Obgleich die größte Abſciſſe bekannt iſt, ſo kann doch die correſpondirende Ordinate nicht geometriſch beſtimmt werden.

Wenn auch die mit dem Punkte C correſpondirende Abſciſſe AE bekannt iſt, ſo iſt die Ordinate EC doch nur zu beſtimmen durch die Integration der Formel

$$dy = \frac{(a^1 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{([e^2 - x^2].[2a^2 - c^2 + x^2])}}$$

Wenn nun nach der Integration x = c geſetzt, ſo erhalten wir die Ordinate CE; das Doppelte derſelbe gibt die Entfernung AB oder D d zwiſchen den beyden

Halbmeſſern. Um die Linie A C zu rectificiren muß man ebenfalls ſeine Zuflucht zu der Integration nehmen. Setzt man den Bogen A M = s, ſo hat man

$$ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{([c^2 - x^2].[2a^2 - c^2 + x^2])}}$$

Eine Gleichung, deren Integral, wenn dabey x = c geſetzt wird, die Länge A C der krummen Linie gibt.

## §. 90.

Man kann den Werth durch Näherung, vermittelſt des Verhältniſſes des Umfanges zum Durchmeſſer, finden.

Da aber dieſe Formeln nicht vollkommen integrabel ſind, ſo kann man die Werthe der geraden Linie A D und der krummen Linie A M C nur durch Näherungen finden.

Zu dieſem Ende ſetzen wir $\sqrt{(c^2 - x^2)} = z$, und erhalten

$$y = \int \frac{(a^2 - z^2)dx}{z\sqrt{(2a^2 - z^2)}}$$

Eben ſo

$$s = \int \frac{a^2 dx}{z\sqrt{(2a^2 - z^2)}}.$$

Wird die Größe $\frac{1}{\sqrt{(2a^2 - z^2)}}$ in eine Reihe aufgelöſet, ſo wird ſie

$$\frac{1}{a\sqrt{(2)}}\left(1 + \frac{z^2}{4a^2} \; \frac{1.3.z^4}{4.8.a^4} + \frac{1.3.5z^6}{4.8.12a^6} + \frac{1.3.5.7z^8}{4.8.12.16a^8} + \text{u. ſ. w.}\right.$$

Und hieraus

$$s = \frac{1}{\sqrt{(2)}}\int dz\left(\frac{a}{z} + \frac{z}{4a} + \frac{1.3.z^3}{4.8.a^3} + \frac{1.3.5z^5}{4.8.12a^5} + \frac{1.3.5.7z^7}{4.8.12.16a^7} + \text{u. ſ. w.}\right.$$

$$s - y = \frac{1}{\sqrt{(2)}}\int dx\left(\frac{z}{a} + \frac{z^3}{4a^3} + \frac{1.3.z^5}{4.8.a^5} + \frac{1.3.5.z^7}{4.8.12.a^7} + \text{u. ſ. w.}\right.$$

Wenn wir dieſes Integral nur für den Fall gebrauchen, wo $x = c$ und $z = c$ iſt, ſo können wir ſie bequem mittelſt des Umfanges des Zirkels darſtellen. Wenn wir das Verhältniß des Durchmeſſers zu dem halben Umfange $= \frac{1}{\pi}$ ſetzen, ſo haben wir

$$\int \frac{dx}{z} = \int \frac{dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn man $x = c$ ſetzt nach der Integration

Auf dieſelbe Weiſe werden folgenden Integrale beſtimmt:

$$\int z\,dx = \frac{1\,\pi c^2}{2.\,2}.$$

$$\int z^3\,dx = \frac{1.\,3.\,\pi c^4}{2.\,4.\,2}.$$

$$\int z^5\,dx = \frac{1.\,3.\,5.\,\pi c^6}{2.\,4.\,6.\,2.}.$$

$$\int z^7\,dx = \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,\pi c^8}{2.\,4.\,6.\,8.\,2.}.$$

Werden dieſe Integrale gebraucht, ſo finden wir

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{(2)}}\left(1 + \frac{1.1.\,c^2}{2.2.2\,a^2} + \frac{1.1.3.3.\,c^4}{2.2.4.4.4\,a^4} + \frac{1.1.3.3.5.5.\,c^6}{2.2.4.4.6.6.6.\,a^6} + \ldots\ldots\right.$$

$$AC - AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{(2)}}\left(\frac{c^2}{2a^2} + \frac{1.\,3.\,c^4}{2.4.4.\,a^4} + \frac{1.\,3.\,3.\,5.\,c^6}{2.4.4.6.8.\,a^6} + \ldots\ldots\right.$$

Und folglich

$$AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{(2)}}\left(1 - \frac{1^2.\,3.\,c^2}{2^2.\,1.\,2.\,a^2} - \frac{1^2.\,3^2.\,5\;c^4}{2^2.4^2.3.4\,a^4} - \frac{1^2.\,3^2.\,5_2.\,7\;c^6}{2^2.4^2.6^2.\,5.6\,a^6} + \ldots\ldots\right.$$

§. 91.

Wenn alſo $AE = c$, und $AD = b$ gegeben ſind, ſo iſt die unveränderliche Größe $a$ und die Länge $AC$ der krummen Linie durch die vorſtehenden Gleichungen beſtimmt; und umgekehrt kann man die gerade Linien $AD$ und $CD$ finden, wenn man die Länge $AC$ der krummen Linie, und die gerade Linie $a$ kennt, durch deren Quadrat das Doppelte der abſoluten Elaſticität dividirt werden muß, um einen Ausdruck für die Kraft zu haben, welche Biegung hervorzubringen ſtrebt.

§. 92.

Bezieht ſich auf die erſte Art der elaſtiſchen Linien.

Wenn man $c = 0$, oder $\frac{x}{c} = \infty$ in die allgemeine Gleichung

$$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{([c^2 - x^2][2a^2 - c^2 + x^2])}}$$

ſetzt, ſo iſt dadurch die erſte Art der elaſtiſchen krummen Linien beſtimmt. Die Linie, welche nach dieſer Hypotheſe entſteht, ſtellt, wie wir § 82 geſehen haben, den natürlichen Zuſtand einer elaſtiſchen Linie dar.

Wir bemerken bey dieſer erſten Art den Fall noch, wo die Größe $c$ gegen $a$ betrachtet ſo klein iſt, daß ſie außer Acht gelaſſen werden kann. Da aber $X$ nicht größer als $c$ werden kann, ſo muß auch $x$ gegen $a$ betrachtet verſchwinden; und die vorſtehende Gleichung wird dieſe

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2[c^2 - x^2])}}.$$

Das Integral iſt

$$y = \frac{a}{\sqrt{(2)}} \text{ Arc. ſin. } \frac{x}{c}.$$

Eine Gleichung, die der länglichten Cycloide gehört.

Weil $c = 0$, oder doch wie Null betrachtet werden kann, ſo wird $AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{(a)}}$ eine Größe, die von der Länge der krummen Linie unendlich wenig verſchieden iſt, weil der Winkel $DAM$ unendlich klein iſt.

## §. 93.

Gewicht, bey welchem die Biegung nach dieſer Vorausſetzung ihren Umfang nimmt.

Wenn wir die Länge der elaſtiſchen Linie = f nehmen, ſo haben wir $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{(2)}}$, und demnach $a = \frac{2f\sqrt{(2)}}{\pi}$ und folglich $\frac{2EKK}{aa} = \frac{EKK\pi\pi}{4ff}$, d. h. wenn die beyden Enden A und B durch den Faden A B verbunden ſind, ſo wird dieſer Faden angeſpannt mit einer Kraft $= \frac{EKK\pi\pi}{4ff}$ (§ 78.)

Wir würden uns von unſerm Gegenſtand zu ſehr entfernen, wenn wir Eulern in ſeinen fernern Unterſuchungen noch weiter folgen wollten. Er gibt der beſtändigen Größe c nach und nach verſchiedene Werthe und findet ſo neue Arten von beſondern elaſtiſchen Curven, die durch beſondere Eigenſchaften von einander verſchieden ſind. Das bisher von uns geſagte war zu unſerm Zwecke nothwendig, und kann hierzu unmittelbar angewandt werden.

## §. 94.

Anwendung auf feſte Körper, die auf ihrer Spitze belaſtet ſind.

Es ſey A B (Fig. 18.) eine auf ihrer Baſis ſenkrechte, und mit einem Gewichte P belaſtete Säule. Da ſie nun ſo geſtellt iſt, daß ſie nach keiner Seite umfallen kann, ſo iſt nichts zu fürchten, wenn ſie unter dem Gewichte P ſich nur nicht biegt. Nennen wir das Vermögen, womit ſie ihrer Biegung widerſteht EKK, und die Höhe AB = 2 f, ſo haben wir geſehen, daß die zu der kleinſten Krümmung erforderliche Kraft eine Größe iſt, die durch $\frac{EKK\pi\pi}{4ff}$ dargeſtellt wird.

Hieraus folgt, daß für gleiche Dimenſionen der Grundflächen, und bey einer gleichen abſoluten Elaſticität, die Laſt, womit eine Reihe von Säulen beladen werden kann, ehe ſie ſich biegen, im umgekehrten Verhältniſſe des Quadrats ihrer Längen ſteht.

## §. 95.

Regel zur Berechnung des abſolut negativen Widerſtandes feſter Körper.

In Rückſicht der Halbmeſſers dieſer Säulen, denen die Laſt ebenfalls proportional ſeyn muß, iſt es klar, daß bey der Biegung die Fibern, oder die elementar Theilchen, woraus die Säulen beſtehen, ſich um irgend eine Umdrehungsachſe aus-

dehnen müſſen, und ſonach findet das, was wie bisher über den relativen Widerſtand der Brechungsebenen geſagt haben, hier wieder Anwendung.

Wenn zum Exempel der parallel mit ſeiner Länge belaſtete feſte Körper priſmatiſch iſt, ſo muß das Gewicht, welches ihn zu biegen im Stande ſeyn ſoll, ſtehen im geraden Verhältniſſe des Quadrats derjenigen Dimenſionen des Baſis, in deren Ebene die Biegung Statt hat, multiplicirt mit der andern Dimenſion, und im umgekehrten Verhältniſſe des Quadrats der Länge.

---

## Phyſicaliſche Betrachtungen über die Biegung der parallel mit ihrer Länge beladenen Körper. Unmittelbare Beſtimmung der Krümmung, die ſie anzunehmen ſtreben.

### §. 96.

Wie man die Biegung der parallel mit ihren Fibern belaſteten Körper erklären kann.

Man möchte Anfangs denken, daß ein feſter Körper, deſſen Fibern vollkommen parallel unter einander ſind, durch kein Gewicht, welches parallel mit der Länge dieſer Fibern wirkt, wird gebogen werden können, weil keine Urſache zu ſeyn ſcheint, warum dieſe Biegung mehr nach der einen, als nach der andern Seite erfolgen ſollte.

Man begreift leicht, daß eine jede Fiber, wenn ſie mit einem hinlänglich großen Gewichte beſchwert wird, zuſammen gedrückt und kürzer werden muß.

Nimmt man nun an, daß die Materie undurchdringlich iſt, ſo müſſen die kürzer gewordnen Fibern das wieder in der Dicke gewinnen, was ſie in der Länge verlohren haben. Sie werden alſo ſeitwärts auf einander wirken, und der Durchmeſſer des Körpers, den ſie bilden, muß alſo größer und größer werden. Wenn aber dieſes Statt haben ſollte; ſo müßten die Fiber keine Cohäſion zu einander haben, denn wenn ſie durch irgend eine Kraft an einander gehalten werden, ſo müſſen ſie ſich nothwendig krümmen, welches ſich leicht demonſtriren läßt.

Um dieſes zu zeigen, ſey das Rechteck A B E F (Fig. 19. Tab. II.) der Längendurchſchnitt eines Bündels (faisceau) an einander hängender Fibern, belaſtet mit einem Gewichte P, welches ihn zuſammen zu drücken ſtrebt.

Die Compreſſion jeder Fiber und die Vergrößerung ihres Durchmeſſers ſind zwey Wirkungen, die zu gleicher Zeit Statt haben und nothwendig aus einander erfolgen müſſen. Es iſt klar, daß alle Fibern, indem ſie gleich ſtark zuſammen gepreßt werden, auch gleichviel in ihrer Dicke zuzunehmen ſtreben. Da ſie aber mit einander zuſammen hängen, ſo widerſetzen ſie ſich auch gegenſeitig dieſer Ausdehnung. Nur die äußern Fibern A B und EF können nach Außen, nach a b und e f ausweichen, dem jedoch auch ſchon die anliegenden Fibern C D und GH, und mittelbar die weiter nach innen befindlichen Fibern ſich widerſetzen.

Wir bemerken nun, daß der Zuſammenhang der Fiber A B mit der benachbarten C D ſich durch kleine unter ſich parallele Linien m n, m′n′, m″n″ u. ſ. w. darſtellen läßt, wodurch ſie einander geknüpft ſind. Wenn alſo die erſte von A B in ab kommen ſoll, ſo kann man ſich vorſtellen, daß aus jedem ihrer Puncte n, n′, n″ u. ſ. w. eine Kraft nach den parallelen Richtungen m n, m′ n′, m″ n″ u. ſ. w. an correſpondirenden Punkten der Fiber C D zieht. Dieſe iſt alſo wirklich in demſelben Falle, als wenn ſie durch mehrere gleiche Kräfte nach einer Richtung ſenkrecht auf ihrer Länge gezogen würde, wovon der Erfolg dieſer ſeyn müßte, daß ſie ſich nach außen zu krümmte. Indem ſie ſich aber nun krümmte, müßten ſich alle Fibern von C bis I mit krümmen, und der Bündel dieſer Fibern müßte demnach A M B annehmen.

Wenn wir nun das ganze Rechteck A B E F als vollkommen gleichartig anſehen, ſo läßt ſich das eben geführte Raiſonnement nothwendig auch auf die äußere Fiber E F anwenden, welche, indem ſich ihr Durchmeſſer um E e vergrößert während die erſtere ihn um A a vergrößerte, die anliegende Fiber G H mit fortziehen wird, und auf dieſe Wirkung wird ſich auf alle anliegende Fibern erſtrecken. Bey einer vollkommenen Gleichartigkeit der Fibern folgt alſo, daß, wenn die eine Hälfte des Bündels ſich krümmt und gegen M convex wird, daß alsdann die andere Hälfte ſich nach der entgegengeſetzten Richtung nach N krümmen muß. Dieſe beyden Krümmungen nach den entgegengeſetzten Richtungen ſtreben ſich nach der Achſe P Q von einander zu trennen. Wenn alſo dieſe Trennung Statt haben ſoll, ſo müſſen die

Kräfte, welche die zuſammenhängenden Fibern nach M und N zu krümmen trachten, ihre Cohäſion an der Achſe überwiegen. Wenn man aber annimmt, daß dieſe Cohäſion größer iſt, als die Kräfte, welche die Biegungen A M B und E N F hervorzubringen ſtreben, oder, was daſſelbe iſt, daß die kleinen Fäden, durch welche, wie wir angenommen haben, die Fibern zuſammen gehalten werden, ſich bis zu einem gewiſſen Grade ausdehnen laſſen; ſo wird der Bündel, anſtatt zu ſpalten, ſich mehr und mehr abplatten, bis die äußerſten und am meiſten ausgedehnten Fibern ihre größte Krümmung erreicht haben, und dann zu gleicher Zeit in M und N zerbrechen.

Daß aber die äußern Fibern nach den entgegengeſetzten Richtungen ſich biegen können, gilt nur nach der von uns angenommenen Hypotheſe, wornach alle Fibern vollkommen homogen ſind. Sonſt wird die Biegung nur nach einerley Richtung ſich äußern. Diejenige, welche ihrer Ausdehnung nach außen am meiſten widerſteht, wird von derjenigen, welche weniger Widerſtand leiſtet, vermöge der Cohäſion, wodurch ſie alle zuſammenhängen, und die ſenkrecht auf ihre Länge wirkt, mit fortgezogen werden.

Wie man ſich übrigens aber auch die Biegung der feſten Körper, welche parallel mit ihrer Länge belaſtet ſind, erklären mag; ſo iſt ſie eine Erfahrungswahrheit, die nicht in Zweifel zu ziehen iſt.

Die Erfahrung beweiſet übrigens, daß feſte prismatiſche und auf dieſe Weiſe beſchwerte Körper ſich faſt immer nach den beyden Ebenen biegen, wornach ſie behauen ſind; da aber die Krümmungen nach jeder von dieſen beyden Ebenen unabhängig von einander ſind, ſo wird es hinreichend ſeyn, nur eine derſelben zu betrachten.

## §. 97.

Wir nehmen an, daß das Gewicht P, womit der feſte Körper belaſtet iſt, in zwey Theile F und H getheilt ſey, wovon der erſte Theil die Krümmung in der Ebene nach der einen Dimenſion des Behaues, und der zweyte die Krümmung in der Ebene nach der zweyten Dimenſion hervorbringt.

Nehmen wir nun (Fig. 20.) AP = x; PM = y; die abſolute Elaſticität an dem Punkte M = EKK, den Krümmungshalbmeſſer an dieſem Punkte = R, ſo haben wir (§ 76.)

$$Fy = \frac{EKK}{R} = -\frac{EKK\,dx\,ddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man $\frac{dx}{dy} = p$, ſo wird

$$Fy\,dy = -\frac{EKKp\,dp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Das Integral dieſer Gleichung iſt

$$\frac{Py^2}{2} + A = \frac{EKK}{\sqrt{(1 + pp)}}$$

Und folglich erhält man endlich

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{\left[E^2K4 - \left(\frac{Fy^2}{2} + A\right)^2\right]}}{\frac{Fy^2}{2} + A}.$$

§. 98.

Die Conſtante A wird durch die Bedingung beſtimmt, daß, wenn y = o iſt, die Tangente $\frac{dy}{dx}$ einen beſtimmten Werth C hat. Wir haben alſo $A = \frac{EKK}{\sqrt{c^2 + 1)}}$.

$$dx = \frac{\left(\frac{Fy^2}{2} + \frac{EKK}{\sqrt{(e^2 + 1)}}\right)dy}{\sqrt{\left\{E^2K4 - \left(\frac{Fy^2}{2} + \frac{EKK}{\sqrt{(e^2 + 1)}}\right)^2\right\}}}$$

Dieſe Gleichung iſt bekanntlich nicht zu integriren, und alſo ſind auch die vollſtändigen Werthe der Coordinaten x und y daraus nicht abzuleiten (§ 90).

## §. 99.

Wenn wir aber den feſten Körper nur in dem erſten Anfange der Biegung betrachten, ſo kann das Element d s der krummen Linie A M B den Elemente der Abſciſſe d x gleichgeſetzt werden, und wir erhalten demnach dieſe einfachen Fundamental-Gleichung Wie ſie für den erſten Grad von Biegung umgeändert wird.

$$Fy = -\frac{EKKddy}{dx^2}$$

Dieſe mit 2dy multiplicirt gibt

$$\frac{EKK.2.dy.ddy}{F} = -2ydy.dx^2.$$

Und in dem man ſie integrirt

$$\frac{EKK\,dy^2}{F} + y^2\,dx^2 = Cdx^2$$

Woraus man man endlich erhält

$$dx = dy\frac{\sqrt{(EKK)}}{\sqrt{(F[C-yy])}}.$$

## §. 100.

Um die beſtändige Größe C zu beſtimmen nehmen wir an, daß die Tangente des Winkels P A M, welchen die krumme Linie mit ihrer Achſe an dem Anfange der Coordinate macht, = e ſey, ſo haben wir für y = 0

$$\frac{dy}{dx} = e = \frac{\sqrt{(FC)}}{\sqrt{(EKK)}}$$

Und $C = \frac{eeEKK}{F}$

Wird dieſer Werth in die vorſtehende Gleichung ſubſtituirt, ſo wird

$$dx = \frac{dy \sqrt{EKK)}}{\sqrt{(eeEKK - Fyy)}}$$

Das Integral hiervon iſt

$$x = \frac{\sqrt{EKK}}{F} \text{ Arc. ſin. } \frac{y\sqrt{(F)}}{e\sqrt{(EKK)}}.$$

Wozu keine beſtändige Größe addirt werden darf, weil x und y zu gleicher Zeit verſchwinden.

Dieſe Gleichung kann auch folgende Form erhalten

$$\frac{y\sqrt{(F)}}{e\sqrt{(EKK)}} = \text{ſin. } x \frac{\sqrt{(F)}}{\sqrt{(EKK)}}.$$

## §. 101.

Ausdruck für das Gewicht, bey welchem die Biegung ihren Anfang nimmt.

Die krumme Linie, deren Natur dieſe Gleichung ausdrückt, iſt von der Art daß die Ordinate y an ihren beyden Enden Null wird, wo x = o, und x = AB = 2 f iſt. Daß in dem erſten Falle das y verſchwindet iſt ſchon aus der Gleichung zu erſehen, damit aber dieſe Größe auch für den zweyten Fall verſchwinde, ſo muß

$$\text{ſin. } 2f \frac{\sqrt{(F)}}{\sqrt{(EKK)}} = o$$

ſeyn. Da nun der Sin. eines Bogens gleich iſt, dem ſin. ſeines Supplements, ſo muß der Bogen $\frac{2f\sqrt{(F)}}{\sqrt{(EKK)}}$, in dem kein Factor Null iſt, das Supplement eines Bogens Null ſeyn, d. h. er muß ein vielfaches des halben Umfanges ſeyn. Nennen wir alſo $\pi$ ſein Verhältniß zum Durchmeſſer, der als Eins angenommen wird, und iſt m irgend eine ganze Anzahl, ſo erhalten wir

$$\frac{2f\sqrt{(F)}}{\sqrt{(EKK)}} = m\,\pi.$$

Und folglich $F = \frac{m^2 \pi^2 EKK}{4ff}$, woraus wir alſo erſehen, daß um einen feſten

Körper unendlich wenig zu biegen, das Gewicht, womit er zu beſchweren iſt, gleich ſeyn muß dem Ausdrucke $\frac{m^2 \pi^2 EKK}{4ff}$.

## §. 102.

Wenn wir dieſen Werth von F in die oben (§ 100) gefundene Gleichung der krummen Linien ſubſtituiren, ſo wird

*Eine allgemeine Gleichung der krummen Linie, und Beſtimmung ihrer Biegungen.*

$$y = \frac{2fe}{m\pi} \text{ ſin. } \frac{m\pi x}{2f}.$$

für $m = 1$ iſt

$$y = \frac{2fe}{\pi} \text{ ſin. } \frac{\pi x}{2f},$$

woraus man ſieht, daß nach dieſer Hypotheſe die krumme Linie AMB (Fig. 20.) die Achſe nur an den beyden Enden A und B ſchneidet, und daß das Gewicht, welches dieſe Krümmung hervorbringt, durch $\frac{\pi^2 EK^2}{4f^4}$ ausgedrückt wird, wie wir ſchon § 93 gefunden haben:

für $m = 2$ hat man

$$y = \frac{2fe}{\pi} \text{ ſin. } \frac{\pi x}{2f}$$

und dieſe krumme Linie ſchneidet die Achſe in der Mitte ihrer Länge, wo $x = f$ iſt; hierzu muß aber das Gewicht $F = \frac{4\pi^2 EK^2}{4f^2}$, oder das vierfache des vorigen ſeyn. Der Körper nimmt in dieſem Falle die Krümmung AMM′B (Fig. 21) an.

Macht man $m = 3$, ſo hat man

$$y = \frac{2fe}{3\pi} \text{ ſin. } \frac{3\pi x}{2f},$$

ſo daß die Courbe die Achſe zwiſchen den beyden Enden an ſolchen Punkten ſchneidet, wo $x = \frac{2f}{3}$ und $x = \frac{4f}{3}$ iſt, wie Fig. 22. darſtellt. Aber das Gewicht F wird

alsdann = $\frac{9\pi^2 EK^2}{4f^2}$, oder das neunfache des erſtern Gewichtes ſeyn, und ſo geht dieß fort.

§. 103.

Man ſieht hieraus, daß man dadurch, daß die beſtändige Größe m als Faktor in den Ausdruck für das Gewicht, womit der feſte Körper beſchwert iſt, eingeführt wurde, die Biegungen der krummen Linie, und die Punkte, wo ſie die Achſe ſchneidet, leicht beſtimmen kann. Dieſe intereſſante Bemerkung über den allgemeinen Ausdruck für die Belaſtung, verdanken wir Lagrange. Sie iſt in einem vortrefflichen Memoire enthalten, welches dieſer gelehrte Geometer in den fünften Band der Schriften der Akademie von Turin einrücken ließ *).

§. 104.

Beſtimmung der Punkte in der Achſe, die den größten Ordinaten correſpondiren.

Wir betrachten wiederum die Gleichung

$$y = \frac{2fe}{m\pi} \text{ſin.} \frac{m\pi x}{2f}$$

und ſuchen diejenigen Punkte in der Länge des feſten Körpers, die den größten Ordinaten der krummen Linie correſpondiren.

Wenn wir differentiiren, erhalten wir

$$dy = \frac{2fe}{m\pi} d. (\text{ſin.} \frac{m\pi x}{2f} = 0$$

und hieraus

$$\text{ſin.} \left(\frac{m\pi x}{2f}\right) = + 1 = \text{ſin.} \left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\text{ſin.} \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \text{ſin.} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) =$$

$$\text{ſin.} \left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right) \ldots\ldots =$$

$$\text{ſin.} \left(\frac{\pi}{2} + [m-1]\pi\right),$$

*) Miscellanea Taurinenſia, (annis 1770 — 1773).

Dieß giebt für x ſo viele Werthe, als die Zahl m Einheiten hat; wenn alſo $m = 1$ iſt, ſo iſt $x = f$; für $m = 2$, iſt $x = \frac{f}{2}$, und $x = \frac{3f}{2}$ u. ſ. w.

§. 105.

Wenn man dieſe verſchiedenen Werthe von x in die Gleichung

$$y = \frac{2fe}{m\pi} \sin. \left(\frac{m\pi x}{2f}\right)$$

Ausdruck für die größten Ordinaten der krummen Linie.

ſubſtituirt; ſo erhält man die größten Ordinaten, welche ihnen correſpondiren.

Nimmt man z. B. $m = 1$ und $x = f$, ſo wird $y = \frac{2fe}{\pi}$; ſetzt man $m = 2$, und ſubſtituirt für x ſeine beyden Werthe $\frac{f}{2}$ und $\frac{3f}{2}$, ſo hat man $y = \frac{2fe}{\pi}$ und $y = -\frac{2fe}{\pi}$ die Anzahl m mag auch ſeyn, wie ſie wolle, ſo hat man für die größte Ordinate immer einerley Werth $\frac{2fe}{\pi}$ mit dem Zeichen + oder —, je nachdem der Theil der Krümmung, welchen man betrachtet, zur Rechten oder zur Linken der für die Achſe genommenen vertikalen Linie liegt.

Nennen wir dieſen Werth von y jetzt b, ſo haben wir die allgemeine Gleichung

$$y = b \sin. \left(\frac{m\pi x}{2f}\right)$$

welche einer länglichten Cycloide zugehört, wie leicht einzuſehen iſt.

§. 106.

Verhältniß der Laſten, welche die Biegung nach den beyden Richtungen der Behauung hervorbringen.

Wenn wir auf die krumme Linie A N B (Fig. 23), welche der feſte prismatiſche Körper nach einer andern Ebene ſeiner Behauung annimmt, daſſelbe Raiſonnement, wie für die Krümmung von x und y (Fig. 20), anwenden; ſo erhalten wir, wenn wir die abſolute Elaſticität des Körpers nach dieſer Richtung $= E'K'K'$;

$AP' = x$; $P'N = z$ (Fig. 23), und die größte Ordinate dieſer Krümmung $= c$ ſetzen,

$$1,\ H = m^2 \pi^2 E'K'K'$$

$$2,\ Z = c \sin. \left(\frac{m \pi x}{2 f}\right).$$

§. 107.

Vergleichen wir die Gewichte F und H mit einander, welche die Biegung nach den verſchiedenen Ebenen der Behauung hervorbringen; ſo haben wir das Verhältniß $F : H = EKK : E'K'K'$, woraus ſich ergibt, daß das ganze Gewicht, um die Krümmung nach einer jeden der beyden Behauungsebenen zu erzeugen, ſich in zwey Theile theilt, die der abſoluten Elaſticität nach den beyden Ebenen proportional ſind.

§. 108.

Für den beſondern Fall, wenn der feſte Körper rechtwinkelig iſt.

Die Grundfläche des feſten Körpers ſey durch h a ausgedrückt. Iſt nun h die Dimenſion der Ebene, wofür x und y gelten, und a die Dimenſion für x und z, ſo haben wir nach der vorſtehenden Theorie, die, wie wir in der Folge ſehen werden, durch die Erfahrung beſtätigt wird,

$$F : H = ah^2 : a^2h = h : a.$$

Die Gewichte F und H ſind alſo den Dimenſionen h und a des feſten Körpers, in deren Ebenen ſie die Biegung erzeugen, proportional.

§. 109.

Man würde das Verhältniß der Laſt zu den größten Ordinaten der Krümmung, welche ſie verurſachet, durch die Reduction der letzten Glieder in der Gleichung für die Elaſticität beſtimmen; weil man aber bey dem gegenwärtigen Zuſtand der Analyſis dieſe Reduction nicht vornehmen kann, ſo muß man ſich begnügen, das Gewicht zu kennen, bey welchem die feſten Körper, wenn ſie parallel mit ihrer Länge dadurch belaſtet ſind, ſich zu biegen anfangen, welches für die Anwendung glücklicherweiſe auch hinreichend iſt.

## Von dem abſolut negativen Widerſtande der durch ihr eigenes Gewicht belaſteten feſten Körper.

### §. 110.

Bisher haben wir die parallel mit ihrer Länge beſchwerten feſten Körper ſo angenommen, als wenn ihr eigenes Gewicht ſo klein ſey, daß man es in dem Ausdruck für dasjenige Gewicht, welches im Stande iſt, ſie zu biegen, ohne Gefahr beträchtlich zu fehlen, ganz außer Acht laſſen dürfe.

Das Gewicht der an ihren Enden beſchwerten feſten Körper iſt in dem Ausdrucke für ihren Widerſtand außer Acht zu laſſen

Obgleich dieſe Hypotheſe für die gewöhnlichen Fälle auch wohl ſtatthaft iſt, wie Euler ſchon bemerkt hat *); ſo glauben wir doch, daß es der Vollſtändigkeit wegen gut ſeyn werde, wenn wir den beſondern Fall unterſuchen, wo ein minder oder mehr elaſtiſcher, auf einer unbeweglichen Ebene vertikal errichteter feſter Körper bloß ſein eigenes Gewicht zu erhalten habe.

### §. 111.

Dem eben angeführten berühmten Geometer verdanken wir wiederum die erſte Unterſuchung über dieſe Frage. Er hat ſie in dreyen auf einander folgenden, und in die Schriften der Petersburger Akademie vom Jahre 1778 eingerückten Abhandlungen mit vieler Sorgfalt angeſtellt.

### §. 112.

Eine weſentliche Bedingung bey der Auflöſung dieſer Aufgabe iſt, daß die Enden des feſten Körpers während der Biegung beſtändig in derſelben Vertikale bleiben. Jetzt ſieht man leicht ein, daß dieſe Biegung an irgend einem Punkte nur in ſo fern Statt haben kann, als eine gewiſſe horizontale Kraft virtuellement auf dieſen Punkt wirkt; es folgt alſo, daß die beyden Enden der Säule auch der Wirkung einer gewiſſen Kraft, die ſenkrecht auf ihre Länge und im Stande iſt, der eben erwähnten Kraft das Gleichgewicht zu halten, unterworfen ſind.

Weſentliche Bedingung der Frage, wenn auf dieſes Gewicht geachtet werden ſoll.

*) Mèmoires de l'Académie de Berlin, an 1757.

## §. 113.

Paradoxe Behauptung zu welcher Euler Anfangs gelangte.

Da Euler Anfangs auf dieſe horizontale Kraft nicht achtete; ſo gelangte er zu dem Schluſſe, daß ein ſchwerer prismatiſcher oder cylindriſcher, auf einer feſten Ebene vertikal geſtellter feſter Körper unter ſeiner eigenen Maſſe ſich nicht biegen könne, wie groß auch immer ſeine Höhe ſey.

Da dieſes Reſultat demjenigen widerſpricht, was er oben gefunden hatte, ſo faßte er gegen die Suppoſition, welche ihm zur Baſis ſeines Calculs gedient hatte, Mistrauen. Er unterſuchte die Frage in einer zweyten Diſſertation, und in einer dritten beſtimmte er endlich die größte Höhe, welche man einem ſchweren, vertikal aufgerichteten feſten Körper geben kann, bis er, von ſeinem eigenen Gewichte bloß belaſtet, ſich zu biegen anfängt.

## §. 114.

Wir werden dieſem großen Geometer in ſeinem bey dieſer Unterſuchung genommenen Gange ganz folgen; und das Reſultat, wozu wir gelangen werden, wird von dem ſeinigen nur in ſo fern verſchieden ſeyn, als wir für ſeinen für die abſolute Elaſticität gebrauchten Ausdruck denjenigen ſetzen werden, wozu wir durch Raiſonnement und darüber angeſtellte Verſuche gelangt ſind *).

---

*) Indem Euler in ſeinem erſten Memoire von 1778 annahm, daß die Ausdehnung der Fibern eines ſich biegenden feſten Körpers um einem Punkte außer der Oberfläche genommen, Statt habe; ſo fand er, daß die abſolute Elaſticität dem Diameter eines cylindriſchen feſten Körpers in der vierten Potenz proportional ſeyn müſſe. Da aber dieſe Ausdehnung wirklich um einem Punkte in der Oberfläche; ja manchmal um einem Punkte innerhalb des Körpers Statt hat, wie ſchon Jakob Bernoulli 1704 (Mémoires de l'Académie des Sciences) bemerkt hat: ſo iſt die Elaſticität dem Diameter in der dritten Potenz proportional, welches auch, wie wir weiter unten ſehen werden, durch die Erfahrung beſtätigt wird. Euler ſelbſt nahm dieſes Verhältniß in ſeiner Abhandlung de curvis elaſticis 1744 an, wo er ſagt: conjunctim ergo tenebit expreſſio EKK rationem compoſitam ex ratione elateris materiae, latitudinis laminae ſimplici, ac duplicata craſſitiei laminae.

§. 115.

Wir nehmen an, daß A B (Fig. 24.) die Achſe einer cylindriſchen, auf einer unbeweglichen Ebene errichteten und ſo conſtituirten Säule ſey, daß ihre beyden Enden von der vertikalen Linie A B ſich nicht entfernen könne. In der Mitte dieſer Säule trachte die horizontale Kraft C c die unendlich kleine Biegung A C B hervorzubringen. Beſchaffenheit der Frage.

Es kommt darauf an, dieſe Biegung in ſo fern ſie von der Kraft C c und von dem eigenthümlichen Gewichte der Säule entſteht, zu beſtimmen. Es wird alsdann leicht ſeyn, anzugeben, in welchem Falle dieſe Krümmung noch fortdauern könne, wenn auch die horizontale Kraft C c verſchwindet, worunter alsdann auch der Fall begriffen iſt, wo der feſte Körper durch ſeine eigene Maſſe ſich zu biegen anfangen wird.

§. 116.

Um dieſe Frage anfänglich in ihrer größten Einfachheit zu betrachten, nehmen wir eine gänzlich unbiegſame aber in zwey gleiche und geradlinigte Theile A C, B C (Fig. 25.) eingetheilte Säule an, welche Theile in C durch eine Art von Charnier mit einander verbunden ſind. Von den beyden Enden A und B nehmen wir ferner an, daß ſie beſtändig in der vertikalen Linie A B bleiben müſſen. Auf einen ganz einfachen Fall reducirt.

Der untere Theil des Syſtems iſt über C hinaus verlängert und mit dem obern Theile C A durch die Feder E e verbunden, welche die Theile einander zu nähern trachtet.

Es ſey nun die Länge jedes Theiles AC und CB = a; das Gewicht = M; die horizontale Kraft Cc = C; der Biegungswinkel O A C = C B O = $\varphi$; die zuſammenziehende Kraft der Feder E e = E, und der Hebelarm derſelben C e = e.

Iſt dieſes angenommen, ſo haben wir den Winkel E C e = 2 $\varphi$, und da derſelbe ſehr klein iſt, ſo iſt die Ausdehnung der Feder E e, das heißt, die Kraft, womit ſie wirkt, demſelben proportional; ſo daß wir ihr Moment den Ausdruck 2 $\varphi$ E e haben. Gleichfalls hat man

$$CO = a \sin. \varphi = a\varphi, \text{ und } AO = BO = a \cos. \varphi = a,$$

Zu dieſer Kraft müſſen wir jene noch hinzufügen, welche erforderlich ſind, um die Säule in dem Stande zu erhalten, worin ſie nach unſerer Annahme verbleiben ſoll.

Fürs erſte muß der Punkt A durch eine bis jetzt noch unbekannte horizontale Kraft A a = A von der rechten zur linken gezogen werden, um der von der linken zur rechten wirkenden Kraft C c zum Theile das Gleichgewicht zu halten.

Zweytens, weil der Punkt B auf der Ebene H F unbeweglich unterſtützt wird, ſo muß dieſe Ebene das Gewicht der Säule an dieſem Punkte erhalten, welche daher wirklich von unten nach oben durch eine Kraft B A = 2 M gedrückt wird.

Ferner muß an dieſem Punkte eine horizontale Kraft B b = B wirken, die gemeinſchaftlich mit der Kraft A der Kraft C das Gleichgewicht hält.

Endlich wirkt das Gewicht des ganzen Syſtems = 2 M aus dem Mittelpunkte der Schwere G, der in der Mitte der gerade Linie C O iſt, nach der vertikalen Richtung G g von oben noch unten.

Da nun unter dieſen eben angegebenen verſchiedenen Kräften das Gleichgewicht Statt haben ſoll; ſo müſſen ſie ſich ihrer Größe nach gegenſeitig aufheben. Man hat alſo erſtens für die horizontalen Kräfte

$$A + B = C \dots (1).$$

Zweytens. Die vertikalen und einander gerade entgegengeſetzten Kräfte B o und G g = 2 M heben ſich nothwendig auf.

Drittens. Die Punkte E und e der beyden Theile A C, C B werden gegenſeitig durch eine und dieſelbe Kraft der Feder E e gezogen.

Der Stand des Gleichgewichtes erfordert ferner, daß das Moment dieſer Kräfte gegen irgend einen Punkt berechnet, ſich gleichfalls gegenſeitig aufheben, und da die Lage dieſes Punktes willkührlich iſt, ſo wollen wir das Ende A, als den Mittelpunkt der Bewegung annehmen.

Nun ſind aber die Momente der beyden Kräfte A a und B O gewiß Null, weil ihre Richtungen durch dieſen Mittelpunkt gehen.

Das Moment der Kraft B b iſt $= 2$ a B; das des Gewichtes der Säule in G $=$ M a $\varphi$, und weil ſie beyde nach einerley Richtung wirken, ſo halten ſie der nach gerade entgegengeſetzter Richtung wirkenden Kraft C das Gleichgewicht. Da nun das Moment derſelben $=$ C a iſt; ſo erhalten wir die Gleichung

$$2aB + Ma\varphi = Ca \ldots (2).$$

Dieſe Gleichung mit der vorſtehenden (1) verbunden gibt

$$A = \frac{1}{2}C + \frac{M\varphi}{2}.$$

$$\text{und } B = \frac{1}{2}C - \frac{M\varphi}{2}.$$

Wenn C als feſter Punkt angenommen wird, und das Syſtem um denſelben im Gleichgewichte ſeyn ſoll, ſo muß das Moment der horizontalen Kräfte in Bezug auf dieſen Punkt an einem jeden der Theile A C und C B dem Momente der zuſammenziehenden Feder E gleich ſeyn. Dieß gibt folgende zwey Gleichungen

$$Aa + \frac{1}{2}Ma\varphi = 2\varphi Ee$$

$$\text{und } Ba + 2Ma\varphi = 2\varphi Ee + \frac{1}{2}Ma\varphi.$$

Werden hierin die eben für A und B gefundenen Werthe ſubſtituirt, ſo werden beyde gleich, und man erhält

$$\frac{1}{2}Ca + Ma\varphi = 2\varphi Ee.$$

Und hieraus wird

$$\varphi = \frac{Ca}{4Ee - 2Ma}.$$

Welches nur dann Statt haben kann, wenn 2 E e nicht gar zu groß gegen M a iſt, weil wir den Winkel $\varphi$ unendlich klein angenommen haben. Es ergibt ſich hieraus

$$C = \frac{2\varphi}{a}(2Ee - Ma)$$

woraus man ſieht, daß die horizontale Kraft C verſchwinden kann, ohne daß die Biegung aufhört, denn dieß iſt wirklich der Fall, wenn $2Ee - Ma = 0$ iſt, und alsdann iſt es klar, daß der feſte Körper ſich bloß durch ſein eigenes Gewicht biegen wird. Hierbey muß übrigens bemerkt werden, daß da der Winkel $\varphi$ unbeſtimmt bleibt, dieſes Gewicht ſo groß werden, und die Biegung ſo lange zunehmen kann, bis der Bruch erfolgt.

## §. 118.

Gleichung, welche die Länge der beyden Theile des Syſtems gibt.

Wenn der Durchmeſſer der Säule $= b$, und deren Höhe $= h$ iſt; ſo iſt $Ma = \frac{h^2 b^2}{4}$.

Wird dieſer Werth in die vorſtehende Gleichung ſubſtituirt, ſo wird

$$2Ee = \frac{h^2 b^2}{4} \text{ und } h = \sqrt{\left(\frac{8Ee}{b^2}\right)}$$

Wenn alſo eine Säule ſich nur in der Mitte biegen kann, und wenn das Moment dieſer Biegung durch die Größe $2Ee$ gegeben iſt; ſo kann man die größte Höhe, bis zu welcher man ſie aufführen kann, und bey welcher ſie durch ihre eigene Maſſe ſich zu biegen anfängt, leicht beſtimmen.

## §. 119.

Anwendung für den Fall, wo der gegebene feſte Körper von einer gleichförmigen Elaſticität iſt.

Das bisher Geſagte iſt auf den Fall, wo die Säule gleichförmig elaſtiſch iſt, leicht anzuwenden. Hierbey iſt nur zu bemerken, daß die horizontale Kraft C und das Gewicht auf der ganzen Länge A B (Fig. 26.) gleichförmig vertheilt ſind. Iſt nun die ganze Höhe $AB = h$; $AP = x$; $PQ = y$; $AQ = s$, und das Gewicht der ganzen Säule $= M$; ſo ſind die Elemente der horizontalen und vertikalen Kräfte, welche auf einen Punkt Q wirken $= \frac{Cds}{h}$ und $\frac{Mds}{h}$, oder weil die Krümmung unendlich klein iſt, $= \frac{Cdx}{h}$ und $\frac{Mdx}{h}$.

Die Entfernung G O des Schwerpunktes G der Säule von der vertikalen Linie A B iſt durch $\frac{\int y\,dx}{h}$ ausgedrückt, und da die Lage dieſes Mittelpunktes für einen beſtimmten Zuſtand der Krümmung A Q B unveränderlich iſt; ſo iſt der Integral von $\frac{\int y\,dx}{h}$, wenn für y ſein durch x auszudrückender Werth geſetzt, und um es vollſtändig zu machen, x = h gnommen wird, eine vollſtändige Größe, die wir durch g bezeichnen. Das Momet des Gewichtes der Säule in Bezug auf den Punkt A iſt alſo $M\frac{\int y\,dx}{h} = Mg$.

Das Moment aller Elemente der Kräfte $\frac{C\,dx}{h}$ in Bezug auf demſelben Punkt wird ſeyn

$$\frac{\int.C\,x\,dx}{h} = \frac{Cx^2}{2h} = \frac{Ch}{2}.$$

Wenn alſo die Bezeichnung A und B für die an den Enden der Säule angebrachten horizontalen Kräfte beybehält, ſo haben wir, wie oben (§ 116.)

$$A + B = C$$

$$\text{und } Bh + Mg = \frac{1}{2}Ch.$$

Und hieraus

$$A = \frac{1}{2}C + \frac{Mg}{h}$$

$$\text{und } B = \frac{1}{2}C - \frac{Mg}{h}.$$

Wir nehmen jetzt den Punkt Q der Säule als feſt an, und ſuchen in Bezug auf dieſen Punkt die Momente der verſchiednen auf die Säule wirkenden Kräfte.

Da die Coordinaten A P und P Q (Fig. 27.) jetzt als beſtändig angenommen werden, ſo ziehen wir zwey andere Ordinaten T V und t u unendlich nahe an einander.

Es folgt nun $AT = t$, und $TV = u$, ſo iſt $Tt = dt$, und das Moment der an $V$ wirkenden horizontalen Kraft iſt $= \frac{Cdt}{h}(x - t)$.

Das Moment der an eben dieſen Punkt wirkenden vertikalen Kraft iſt

$$= \frac{Mdt}{h}(y - u).$$

Indem wir die Summe dieſer Wirkungen nehmen, und die Integrale dadurch vollſtändig machen, daß wir $t = x$ und $u = y$ ſetzen, ſo finden wir

$$\int \frac{Cdt}{h}(x - t) = \frac{Ct}{h}\left(x - \frac{t}{2}\right) = \frac{Cx^2}{2}$$

und

$$\int \frac{Mdt}{h}(y - u) = \frac{M}{h}\left(yt - \int udt\right) =$$

$$\frac{M}{h}\left(yx - \int ydx\right) = \frac{M}{h}\int xdy.$$

Wird hierzu das Moment der Kraft $A = Ax$, welche mit dieſer gemeinſchaftlich wirkt, hinzugefügt; ſo iſt das Moment der geſammten Kraft, welche die Biegung in dem Punkte $Q$ hervorbringt

$$= Ax + \frac{M}{h}\int xdy - \frac{Cx^2}{2h}$$

Und dieſer Ausdruck iſt dem Momente der Elaſticität $- \frac{EKKddy}{dx^2}$ an dieſem Punkte gleich.

## §. 120.

Gleichung, welche die Auflöſung der Frage gibt.

Man erhält alſo die Gleichung

$$Ax + \frac{M\int xdy}{h} - \frac{Cx^2}{h} + \frac{EKKddy}{dx^2} = 0.$$

Wird für A der gefundene Werth geſetzt, und das Ganze mit $\frac{h}{M}$ multiplicirt, ſo iſt

$$\left(\frac{Ch}{2M}+g\right) x - \frac{Cx^2}{2M} + \int x\,dy + \frac{EKKhddy}{Mdx^2} = 0.$$

Woraus der Werth für y und x durch eine zweyfache Integration gefunden werden muß.

## §. 121.

Ehe wir weiter gehen, bemerken wir:

1) das Integral von $\int x\,dy$ muß ſo beſtimmt werden, daß es mit x zugleich Null wird. Bedingungen, worna ſie integrirt werden muß.

2) Nach der erſten Integration hat die Tangente $\frac{dy}{dx}$ für den Anfang der Coordinaten einen beſtimmten Werth $\alpha$.

3) Da die Krümmung durch den Punkt A gehen muß, ſo muß die zweyte Integration ſo completirt werden, daß die Coordinaten zugleicher Zeit verſchwinden.

Iſt alles dieſes geſchehen, ſo bleibt zur vollſtändigen Auflöſung der Aufgabe noch die Bedingung übrig, daß, wenn x = h geſetzt wird, das y zum zweyten mahle = 0 werde. Die Gleichung, welche man erhält, wird bloß die beſtändigen Größen der Differential-Formel und die Tangente $\frac{dy}{dx} = \alpha$ des Biegungswinkels am Anfange der Krümmung enthalten, welcher Winkel nicht zu beſtimmen iſt. Die Größe $g = \frac{\int y\,dx}{h}$, welche noch in der Formel vorkommt, findet man in endlichen und beſtändigen Gliedern, wenn $\int y\,dx$, mittelſt des zwiſchen den Coordinaten x und y Statt habenden endlichen Verhältniſſes, integrirt, und wenn nun dieß Integral vollſtändig zu machen x = h geſetzt wird. Wird dieſer Werth von g ſubſtituirt, ſo wird ſich daraus der Werth der Tangente $\alpha$, als eine Funktion den horizontalen Kraft C, beſtimmen laſſen.

Aus dieſer letztern Gleichung wird ſich nun ergeben, daß bey einer Biegung nothwendig eine Kraft C vorausgeſetzt werden muß, wodurch dasjenige beſtätigt wird, was wir ſchon oben (§ 116.) gefunden haben, daß nähmlich eine aufgerichtete Säule eine ſolche Höhe haben kann, bey der ſie ſich durch ihr eigenes Gewicht biegen muß, welchen Fall wir hier näher unterſuchen wollen.

§. 122.

Unterſuchung des Falles, wo die horizontalen Kräfte Null ſind.

Wir nehmen alſo C = o, und ſetzen $\frac{EKKh}{M} = m$ in die Formel

$$\left(\frac{Ch}{2M} + g\right) x - \frac{Cx^2}{2M} + \int x dy + \frac{EKKh\, ddy}{M dx^2} = o$$

ſo wird ſie

$$gx + \int x dy + \frac{m\, ddy}{dx^2} = o.$$

Dieſe Formel iſt nur durch eine Reihe zu integriren, wir nehmen alſo

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots\ldots$$

Wird hieraus der Werth von $\int x dy$, und von $m \frac{ddy}{dx^2}$ gezogen, und die Summe der Coefficienten der Potenzen von x gleich o geſetzt; ſo findet man, wenn n irgend eine Zahl bedeutet, daß alle Coefficienten derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Form 3n + 2 haben, gleich Null ſind; die Coefficiente derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Form 3n + 1 haben, werden durch α, und die Coefficienten von ſolchen Potenzen von x, welche die Form 3n haben, werden durch g gegeben ſeyn, ſo daß man erhält

$$y = \alpha x - \frac{gx^3}{2.3.m} - \frac{\alpha x^4}{2.3.4.m} + \frac{3gx^6}{2.3.4.5.6.m^2} + \frac{4\alpha x^7}{2.3.4.5.6.7m^2} - \text{u. ſ. w.}$$

§. 123.

Formel, welche die Auflöſung der Aufgabe enthält.

Nennt man die Summe der mit α multiplicirten Glieder p; und die Summe der mit g multiplicirten Glieder q; ſo kann man y = αp + gq ſetzen.

Wird dieſer Werth in die zu integrirende Formel geſetzt, ſo ändert dieſe ſich dahin ab, daß

$$gx + \alpha \int x dp + g \int x dq + m\alpha \frac{ddp}{dx^2} + \frac{mgddq}{dx^2} = 0$$

wird, und hieraus erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$\int dxp + m \frac{ddp}{dx^2} = 0 \ldots\ldots (1).$$

$$x + \int xdq + m \frac{ddq}{dx^2} = 0 \ldots\ldots (2).$$

Dieſe müſſen integrirt werden. Da dieſes aber nur durch Näherungen geſchehen kann; ſo ſetzen wir:

$$p = x - Ax^4 + Bx^7 - Cx^{10} + Dx^{13} - \text{u. ſ. w.}$$

wir haben alſo

$$0 = \begin{cases} \int \frac{mddp}{dx^2} = -4.3.mAx^2 + 7.6mBx^5 - 10.9.mCx^8 + 13.12Dx^{11} - \text{u. ſ. w.} \\ + \int xdp = \ldots \frac{x^2}{2} - \frac{4Ax^5}{5} + \frac{7.Bx^8}{8} - \frac{10Cx^{11}}{11} + \text{u. ſ. w.} \end{cases}$$

Folglich

$$A = \frac{1}{2.3.4.m}; \; B = \frac{1.4}{2.3\ldots.7.m^2}; \; C = \frac{1.4.7}{2.3\ldots.10m^3};$$

$$D = \frac{1.4.7.10}{2.3\ldots.13m^4} \text{ u. ſ. w.}$$

Eben ſo ſetzen wir

$$q = -A'x^3 + B'x^6 - C'x^9 + D'x^{12} - \text{u. ſ. w.}$$

dieß gibt

$$0 = \begin{cases} \frac{m\,ddq}{dx^2} = -3.2.m.A'x + 6.5.mB'x^4 9.8.mC'x^7 + 12.11\,mD'x^{10} - \text{u. ſ. w.} \\ + \int x\,dq = \ldots\ldots\ldots - \frac{3.A'x^4}{4} + \frac{6.B'x^7}{7} - \frac{9C'x^{10}}{10} + \text{u. ſ. w.} \\ + x = \ldots\ldots\ldots x \end{cases}$$

Und

$$A' = \frac{1}{2.3.m}\,;\; B' = -\frac{1.3.}{2.3\ldots6m^2}\,;\; C' = \frac{1.36.}{2.3\ldots.9\,m^3}\,;$$

Die Werthe von p und q ſind alſo durch dieſe unendlichen Reihen beſtimmt:

$$p = x - \frac{x^4}{2.3.4\,m} + \frac{1.4x^7}{2.3\ldots7m^2} - \frac{1.4.7x^{10}}{2.3\ldots.10m^3} + \text{u. ſ. w.}$$

$$q = -\frac{x^3}{2.3.m} + \frac{1.3.x^6}{2.3\ldots6m^2} - \frac{1.3.6x^9}{2.3\ldots.9m^3} + \frac{1.3.6.9x^{12}}{2.3\ldots..12m^4}\ \text{u. ſ. w.}$$

die Summen derſelben, und wenn zugleich h für x geſetzt würde, würden die erſte Gleichung $\alpha\,p + gq = 0$ geben. Man hat ferner

$$\int p\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1.x^5}{2.3\ldots5m} + \frac{1.4.x^8}{2.3\ldots8m^2} - \frac{1.4.7x^{11}}{2.3\ldots.11m^3}\ \text{u. ſ. w.}$$

$$\int q\,dx = -\frac{x^4}{1.2.3m} + \frac{1.3.x^7}{2.3\ldots7m^2} - \frac{1.3.6x^{10}}{2.3\ldots.10m^3} + \text{u. ſ. w.}$$

und da $gh = \int y\,dx = \alpha\int p\,dx + g\int y\,dx$ iſt, ſo wird

$$g = \frac{\alpha\int p\,dx}{h - \int p\,dx}.$$

Wird dieſer Werth in die Gleichung $\alpha p + g q = 0$ geſetzt, ſo erhält man die Gleichung

$$hp - p\int q\,dx + q\int p\,dx = 0$$

welche nur die beyden beſtändigen Größen m und h enthält, und woraus folglich die geſuchte Höhe leicht zu finden iſt.

## §. 124.

Setzt man der Kürze wegen $\frac{x^3}{m} = \frac{h^3}{m} = t$, ſo werden vorſtehende Reihen Beſtimmung der geſuchten Höhe.

$$p = h\left(1 - \frac{1t}{2.3.4} + \frac{1.3.t^2}{2\ldots7} - \frac{1.4.7.t^3}{2\ldots.10} + \text{u. ſ. w.}\right) = hP.$$

$$q = -1\left(\frac{t}{2.3} - \frac{1.2t^2}{2\ldots6} + \frac{1.3.6.t^3}{2\ldots.9} - \text{u. ſ. w.}\right) = -1Q.$$

$$\int p\,dx = h^2\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2.5} + \frac{1.4.t^2}{2\ldots7} - \frac{1.36.t^3}{2\ldots.10} + \text{u. ſ. w.}\right) = h^2 P'$$

$$\int q\,dx = -h\left(\frac{2.3.4}{1} - \frac{1.3.t^2}{2\ldots7} + \frac{1.3.6t^3}{2\ldots.10} - \text{u. ſ. w.}\right) = -hQ'$$

Werden dieſe Werthe in die letzte Gleichung geſetzt, ſo wird dieſe Formel, wenn ſie zugleich durch $h^2$ dividirt wird,

$$P + PQ' - P'Q = 0.$$

worin nur noch t allein zu beſtimmen übrig bleibt. Soll t beſtimmt werden, ſo muß dafür in der Entwickelung der vier vorſtehenden Reihen eine ſolche Größe ſubſtituirt werden, welche der Gleichung $P + PQ' - P'Q + 0$ eine Genüge leiſtet, welche nur durch Verſuche zu finden iſt.

Euler, indem er die beyden erſten Reihen für die Werthe P und Q bis auf 14 Glieder, und die beyden letzten, welche die Werthe für P' und Q' geben, bis auf 13 Glieder fortſetzte, fand, daß die Zahl 200 für t geſetzt der letzten Gleichung ſehr nahe entſpricht.

Es iſt nähmlich

$$P = +0{,}1734;\ P' = +2{,}7284.$$
$$Q = +0{,}1631;\ Q' = \div 1{,}4980.$$

Hieraus erhält man

$$P(1 + Q') = 0,4331.$$

$$\text{und } P' Q = 0,4450.$$

Der Unterſchied iſt $= 0,0119$.

Bis auf den kleinen Unterſchied von 0,0119 entſpricht die Zahl 200 der Formel, und dieſer geringe Unterſchied iſt um ſo mehr außer Acht zu laſſen, da die einzige Cubik-Wurzel von t in dem Calcul vorkommt.

Man hat alſo ſehr nahe bey $h^3 = 200\,m = 200\,\frac{EKKh}{M}$, und weil $M = hbbd$ iſt, wenn man nähmlich den Durchmeſſer der Säule $= b$, und das ſpecifiſche Gewicht $= d$ nimmt; ſo hat man endlich

$$h = \sqrt[3]{\left(\frac{200\,KKK}{bbd}\right)}$$

Eine Gleichung, wodurch die Frage vollſtändig aufgelöſet wird, ſo bald man den Werth von EKK durch die Erfahrung hat kennen lernen.

Zweiter Abſchnitt.

# Von ſolchen feſten Körpern, die einen gleichen Widerſtand leiſten.

Definition von ſolchen feſten Körpern, die einen gleichen Widerſtand leiſten. Ihre allgemeine Gleichung. Betrachtungen, welche davan abhängen.

§. 125.

Die krummen Linien CMA und AM′E (Fig. 28. Taf. III.) denke man ſich auf zwey Ebenen verzeichnet, die ſenkrecht auf einander ſind. Ferner gedenke man ſie ſich als die Grenzen der Grundflächen zweyer Cylinder, wovon ein jeder ſenkrecht auf einer dieſer Ebenen errichtet iſt. Die Oberflächen dieſer Cylinder werden ſich nach einer Linie DP′A ſchneiden, und ſo mit den Grundflächen gemeinſchaftlich den Theil des Körpers ABCDE bilden. Erzeugung der feſten Körper, welche wir jezt betrachten wollen.

Dieſes iſt die Entſtehungsart derjenigen feſten Körper, wovon wir jezt reden wollen, wenn anders nicht ausdrücklich dabey bemerkt iſt, daß wir von Pyramiden oder ſolchen Körpern handeln, welche durch die Umdrehung erzeugt werden.

Die horizontale Linie AB, in welcher ſich die beyden Ebenen BCMA und AM′EB ſchneiden, nennen wir die Achſe des feſten Körpers.

Die vertikalen Schnitte des feſten Körpers perpendikulär auf dieſe Achſe nennen wir die Brechungsebene.

Die auf der horizontalen Ebene verzeichnete krumme Linie A M′ E wird durch den Nahmen Breitenkrümmung bezeichnet; ſo wie die krumme Linie C M A auf der vertikalen Ebene die Höhenkrümmung der Brechungsebene heißt.

§. 126.

Definition von ſolchen feſten Körpern, die einen gleichen Widerſtand leiſten. Ihre allgemeine Gleichung.

Körper von gleichem Widerſtande heißen ſolche, deren Figur von der Art iſt, daß das Moment der Kraft, welche ſie um irgend einen Punkt in der Achſe zu zerbrechen ſtrebt, dem Momente des Widerſtandes der dieſem Punkte correſpondirenden Brechungsebene gleich iſt; oder allgemeiner: Ein Körper iſt von gleichem Widerſtande, wenn das Verhältniß des Widerſtandes zu der Gewalt, welche denſelben zu überwinden trachtet, für alle Punkte in der ganzen Länge des feſten Körpers unveränderlich iſt.

§. 127.

Wenn die Breite einer rechtwinkeligen Brechungsebene z, und ihre Höhe y heißt; ſo wird (§ 36.) das Moment ihres Widerſtandes, nach Galilei und Leibnitzens Hypotheſen, durch z y y ausgedrückt ſeyn.

Wenn die Entfernung der Brechungsebene z y von dem Ende A der Achſe A B = x iſt; ſo wird das Moment des Gewichtes, womit der feſte Körper beſchwert iſt, im Allgemeinen durch irgend eine Funktion F. (x) von dieſer Abſciſſe dargeſtellt werden können. Für feſte Körper von gleichem Widerſtande erhalten wir alſo die allgemeine Gleichung

$$zyy = F.\,(x).$$

§. 128.

Die Zahl dieſer Körper iſt unendlich.

Wenn die krumme Linie von einer der Dimenſionen z oder y gegeben, und der Werth dieſer Dimenſionen in die Funktion von x der vorſtehenden Gleichung ſubſtituirt iſt; ſo kann man daraus die krumme Linie der zweyten Dimenſion unmit-

telbar ableiten. Man erhält alſo ſo viele feſte Körper von verſchiedener Form, als man verſchiedene Verhältniſſe einer der Dimenſionen der Brechungsebene zu der correſpondirenden Abſciſſe annehmen kann.

Ferner, womit ein feſter Körper beſchwert iſt, kann ſelbſt wiederum irgend Funktion ihres Hebelarmes ſeyn, und das Verhältniß zwiſchen dieſen beyden Faktoren des Moments F. (x) kann unendlich verſchieden ſeyn, und folglich ſind unendlich viele, ihrer Form nach verſchiedene, feſte Körper von gleichem Widerſtande möglich.

## §. 129.

Der Hebelarm der Kraft, welche die Biegung hervorzubringen ſtrebt, iſt an dem Ende A gleich Null. Das Moment F. (x) muß alſo nothwendiger Weiſe mit x verſchwinden, denn dieſe Funktion muß ſo beſchaffen ſeyn, daß x ein Faktor in allen Gliedern iſt, woraus ſie immerhin beſtehen mag. Eigenſchaften, welche ſie weſentlich charakteriſiren.

Wenn F. (x) = o, ſo muß auch zyy = o, und folglich entweder z = o, oder y = o, oder es müſſen auch z und y zu gleicher Zeit = o ſeyn. Wie alſo auch die erzeugenden krummen Linien eines feſten Körpers von gleichem Widerſtande immerhin ſeyn mögen; ſo muß derſelbe ſich immer entweder in einer Spitze oder auch in einer Schärfe endigen, die parallel oder perpendikulär auf die Richtung der Kraft iſt, welche die Biegung hervorzubringen ſtrebt. Dieſes iſt eine charakteriſtiſche Eigenſchaft von den feſten Körpern dieſer Art.

## §. 130.

Wir bemerken jetzt, daß die allgemeine Gleichung für feſte Körper von gleichem Widerſtande z y y = F. (x) auch die Gleichung einer, auf drey unter einander ſenkrechten Ebenen bezogenen, krummen Oberfläche iſt. Ihre allgemeine Gleichung iſt zugleich eine Gleichung für krumme Oberflächen.

Es iſt klar, daß dieſe Oberfläche die Ebenen der Coordinaten x, z und x y nach ihrer den Ebenen von y, z gemeinſchaftlichen Interſektion durchſchneidet; denn wenn dieſes nicht Statt hätte, ſo könnte für x = o nicht auch z y y = o ſeyn, wobey es gleich viel iſt, ob man annimmt, daß nur die eine dieſer Dimenſionen Null ſeyn ſoll, oder ob ſie beyde zu gleicher Zeit verſchwinden ſollen.

## §. 131.

Auf eine ſolche Oberfläche ziehe man zwiſchen einem gegebenen Punkt und einem ihrer Durchſchnitte, welche ſie mit den Ebenen der Coordinaten macht, irgend eine Linie, und auf dieſer Linie laſſe man eine unbeſtimmte gerade Linie nach einander horizontal und vertikal ſich bewegen; ſo wird dieſe gerade Linie zwey cylindriſche Oberflächen erzeugen, welche ihrem gemeinſchaftlichen Durchſchnitte und zwiſchen den drey Ebenen der Coordinaten einen Körper von gleichem Widerſtande einſchließen, indem die Gleichung $zyy = F.(x)$ einer jeden ſeiner Brechungsebenen entſpricht, und da dieſe Eigenſchaft bey dem feſten Körpern, deren Erzeugung wir ſo eben angegeben haben, unabhängig iſt von dem Geſetze oder der Willkühr, welche den Zug der Direktrice auf der krummen Fläche beſtimmt haben; ſo folgt hieraus, daß eine unendliche Menge ſolcher feſter Körper von gleichem Widerſtande möglich ſind, deren Brechungsebene keinem Geſetze der Stetigkeit folgen.

## §. 132.

Es muß eine große Anzahl derſelben in der Natur exiſtiren.

Dieſe Betrachtung über die feſten Körper von gleichem Widerſtande, und das beſtändige Geſetz, welches überall in der Natur beobachtet zu ſeyn ſcheint, ein jedes ihrer Werke dem damit beabſichtigten Zwecke gemäß einzurichten, muß uns auf den Gedanken führen, daß alle ihre Werke, welche dazu beſtimmt ſind, einer gewiſſen Gewalt widerſtehen zu können, auf eine ſolche Art eingerichtet ſind, daß ſie der Wirkung dieſer Gewalt an allen Punkten einen gleichen Widerſtand leiſten. So ſind wahrſcheinlich die Stengel und die Zweige der den Winden ausgeſetzten Gewächſe; die Zähne und die Schalen gewiſſer Thiere; die knorpelige Bauart der Floßfedern und der Gräten der Fiſche, und noch viele andere Körper beſchaffen, welche man bisher in dieſer Hinſicht noch nicht beobachtet hat.

## §. 133.

Beſtimmung der krummen Linie, nach welcher ſie anfangen ſich zu biegen.

In Rückſicht der krummen Linie, welche feſte Körper im Umfange ihrer Biegung annehmen, muß man ſich erinnern, daß, wenn man die abſolute Elaſticität eines feſten Körpers an irgend einem Punkte wo EKK, und den Krümmungshalbmeſſer an dieſem Punkte R nennt, daß alsdann ſein Widerſtand (§ 76.) durch $\frac{EKK}{R}$ angedeutet iſt, ein Ausdruck, welcher dem Momente aller Kräfte, die die Krümmung

hervorzubringen ſtreben, gleich ſeyn muß. Dieſes Moment kann nun allgemein durch F. (x) dargeſtellt werden, und man erhält alſo die Gleichung $\frac{EKK}{R} = F.(x)$; aber die Vorausſetzung von einem gleichen Widerſtande gibt auch $\frac{EKK}{R} = zyy$, und folglich iſt $R = \frac{EKK}{zyy}$; und da die Größen $EKK$ und $zyy$ unter ſich proportional ſind; ſo ergibt ſich daraus der Schluß, daß in dem hier angenommenen Fall der Krümmungshalbmeſſer eine beſtändige Größe iſt, oder, daß Körper von gleichem Widerſtande ſich nach einem Zirkelbogen biegen. Auch ſchon aus der Eigenſchaft vom gleichen Widerſtande erſieht man leicht, daß die Krümmungen, welche ſolche Körper annehmen, in allen Punkten ihrer Länge gleichförmig ſeyn müſſe.

---

## Von den feſten Körpern von gleichem Widerſtande, wenn das auf ſie wirkende Gewicht eine unveränderliche Größe iſt.

### §. 134.

Wir nehmen anfänglich an, der Körper von gleichem Widerſtande ſey in einem Punkte feſt unterſtützt, und an dem andern Ende mit einem unveränderlichen Gewichte = P beſchwert. Die Wirkung dieſes Gewichtes auf die Brechungsebene $zy$ wird durch $Px$ dargeſtellt. In dieſem beſondern Falle hat man alſo $F. (x) = Px$, und hiernach wird die allgemeine Formel in dieſe umgeändert

*Wie die allgemeine Formel abgeändert wird, wenn der widerſtehende Körper mit einem unveränderlichen Gewichte beſchwert iſt.*

$$zy^2 = Px.$$

### §. 135.

Um die beyden Glieder dieſer Gleichung homogen zu machen, ſey die gegebene Länge $AB$ des feſten Körpers = f; die Breite $BE$ der Brechungsebene an dem Unterſtützungspunkte = a, und ihre Höhe $BC$ = h; ſo hat man, vermöge der Be-

*Wie die beyden Glieder dieſer Gleichung homogen gemacht werden.*

dingung des gleichen Widerſtandes $a h^2 = P f$, und folglich $P = \frac{a h^2}{f}$. Wird dieſer Werth in die vorſtehende Formel ſubſtituirt, ſo wird

$$z y^2 = \frac{a h^2 x}{f} \ldots\ldots (1).$$

worin die Glieder gleichartig ſind *).

---

*) In der Vorrede haben wir geſagt, daß Guy-Grandi mittelſt der Methode der alten Geometer dahin gelangt ſey, folgende Aufgabe allgemein aufzulöſen: die krumme Linie der einen Dimenſion eines Körpers von gleichem Widerſtande ſey gegeben, es ſoll die krumme Linie der andern Dimenſion geſucht werden. Die Conſtruktion, welche er angewandt hat, iſt intereſſant, und verdient den Leſern um ſo mehr mitgetheilt zu werden, weil die Mittel, welche die bloße Geometrie zur Auflöſung ſolcher Aufgaben darbietet, und welche von Viviani, Hughens und andern Mathematikern des 17ten Jahrhundert mit ſo vielem Erfolge gebraucht wurden, in den neuern Zeiten immer mehr vernachläſſigt werden.

Eine Linie A B (Fig. 29.) ſey die Achſe eines in B eingefugten, und in A mit einem unveränderlichen Gewichte beſchwerten feſten Körpers; die Dimenſionen der Brechungsebene an dieſem Punkte ſeyn die Linie B C und B E, und C N A ſey die Breitenkrümmung; ſo wie A M E die zu beſtimmende Höhenkrümmung ſey.

Man ziehe die gerade Linie A C, und durch irgend einen Punkt P in der Achſe A B die Linie M N ſenkrecht auf dieſe Achſe; auf dieſer Linie nehme man den Theil P M ſo, daß man das Verhältniß $PN : PK = (BE)^2 : (PM)^2$ bekommt; ſo iſt der auf dieſe Art beſtimmte Punkt M ein Punkt in der geſuchten krummen Linie.

Denn wenn der feſte Körper von gleichem Widerſtande ſeyn ſoll, ſo muß ſeyn:

$$AB : AP = BC\,(BE)^2\; PN\,(PM)^2,$$

nach der Conſtruktion iſt $PN : PK = (BE)^2 : (PM)^2$, und wenn man die vordern Glieder mit $\frac{BC}{PN}$ multiplicirt,

$$BC : PK = BC\,(BE)^2 : PN\,(PM)^2.$$

§. 136.

Wir nehmen z. B. an, daß die Höhenkrümmung ein viertels Zirkel, und deſſen Halbmeſſer $= f$ ſey. Alsdann iſt $yy = 2fx - xx$, und folglich

Anwendungen von dieſer Formel.

$$z(2fx - xx) = \frac{ah^2x}{f}.$$

---

Es iſt aber

BC: PK = AB: AP; folglich u. ſ. w.

Wenn die Höhenkrümmung gegeben, und die Breitenkrümmung zu beſtimmen wäre; ſo behielte man die vorſtehende Conſtruktion bey, und nähme PN ſo, daß man die Proportion

$$(PM)^2 : (BE)^2 = PK : PN.$$

Man ſieht leicht ein, daß dieſe Conſtruktion der Körper von gleichem Widerſtande richtig iſt, die krummen Linien ihrer Dimenſionen mögen dem Geſetze der Stetigkeit unterworfen ſeyn oder nicht, wodurch in die Frage diejenige Art von Funktion mit eingeführt wird, welche bey den neuern Geometern willkührliche Funktionen (fonctions arbitraires) genannt werden.

Grandi nimmt ferner an, daß das Moment des Gewichtes, womit der feſte Körper beladen iſt, irgend einer Potenz des Hebelarmes, woran es wirkt, proportional iſt, und ſucht nun nach dieſer Hypotheſe für einzelne Fälle die Figur des feſten Körpers von gleichem Widerſtande.

Wenn, z. B. dieſes Moment dem Quadrate des Hebelarmes, oder der Abſciſſe AP proportional iſt; ſo beſtimmt er PM oder PN vermittelſt dieſer Proportion.

$$PN : \frac{(PK)^2}{BC} = (BE)^2 : (PM)^2.$$

Und wenn man die vordern Glieder mit $\frac{BC}{PN}$ multiplicirt, ſo hat man

$$(BC)^2 : (PK)^2 = BC\,(BE)^2 : PN\,(PM)^2 = (AB)^2\,(AP)^2,$$

welche Proportion die Bedingungen der Frage enthält.

Oder $z(2f - x = \frac{ah^2}{f} = af$, weil $h = f$, welche Gleichung einer auf ihre Aſymptoten reducirten Hyperbel gehört.

§. 137.

Macht man $z = \frac{xx}{b}$, ſo wird die Formel (1) $\frac{x^2y^2}{b} == \frac{ah_2x}{f}$, oder da $a == \frac{f^2}{b}$, ſo erhält man $xy^2 = fh^2$.

Wir wollen uns nicht dabey aufhalten, dieſe Gleichung zu conſtruiren, und bemerken bloß, daß für $x = 0$ der Werth von $y$ unendlich iſt.

§. 138.

Varignon's drey Vorausſetzungen.

Wenn wir in der Formel (1) nach einander annehmen $z = a$; $y = h$; und $z = y$, ſo haben wir die drey von Varignon 1702 gefundenen feſten Körper von gleichem Widerſtande.

§. 139.

Feſte Körper von gleichem Widerſtande an ihren Enden frey unterſtützt.

Jetzt betrachten wir den feſten Körper A′BDMM′A (Fig. 30.) der auf einer unbeweglichen Linie HF unterſtützt iſt, mit der geraden Linie P′M, welches die Baſis eines durch irgend einen Punkt P gehenden vertikalen Durchſchnitts PP′ iſt,

---

Der beſondere Fall aber, wo der feſte Körper von gleichem Widerſtande bloß ſein eigenes Gewicht zu tragen hat, iſt unter dieſen ſonſt allgemeinen Conſtruktionen nicht mit enthalten. Wir werden auch bald ſehen, daß die Auflöſung dieſer Frage weit über die Kräfte der Elementar-Geometrie geht.

Wer näher hierüber unterrichtet zu ſeyn wünſcht, ſtudire Grandi's Werk betitelt: Ripoſta apologetica del maeſtro Guido Grandi camaldoleſe, etc. Lucae 1712; oder den 3ten Band von Galilei's Werken nach den Ausgaben von 1718 und 1744 in welchen ein Theil dieſer Vertheidigungs-Schrift eingerückt iſt.

zuſammen fällt. An den Enden A und A′ dieſes Körpers ſind zwey Gewichte Q′ und Q″ angebracht, die ſich gegenſeitig das Gleichgewicht halten. Hierdurch entſteht für die beyden Theile PA und PA′ des feſten Körpers eben daſſelbe, als wenn ſie beyde nach ihrer gemeinſchaftlichen Brechungsebene P P′ eingeklemmt wären. Es ſey nun die gegebene Länge A A′ in den Punkt B in zwey gleiche Theile getheilt, und BA = BA′ = f; für die Linien AP, PM, PM′, BE, BC bleibe aber die bisherige Bezeichnung, und die Summe der beyden Gewichte Q′ + Q″ ſey = Q.

Da nun die Gewichte Q′ und Q″ im umgekehrten Verhältniſſe ihrer Hebelarme ſeyn müſſen (§ 51.), ſo haben wir

$$Q' : Q'' = 2f - x : x.$$

Und

$$Q : 2f = Q' : 2f - x$$

folglich $Q' = \frac{Q}{2f}(2f - x)$, und der Ausdruck für die Wirkung dieſes Gewichtes in Rückſicht der Achſe des Gleichgewichtes HF iſt $= \frac{Q}{2f}(2fx - x^2)$. Dieſer Wirkung muß der Widerſtand der Brechungsebene PP′ gleich ſeyn, und folglich hat man

$$zy^2 = \frac{Q}{2f}(2fx - x^2).$$

Wird in dieſe Gleichung der Werth von Q, als eine Funktion von den für die Mitte der Länge des Körpers gegebenen Dimenſionen, ſubſtituirt; ſo wird

$$zyy = \frac{ah^2}{f^2}(2fx - xx) \ldots (2).$$

## §. 140.

Setzt man im dieſer Formel nach einander z = a; y = h, und z = y; ſo erhält man wieder drey feſte Körper von gleichem Widerſtande, wovon auch Varignon in ſeinem ſchon angeführten Memoire Erwähnung thut. Es würde unnütz ſeyn

Drey andere Vorausſetzungen von Varignon, welche dieſem Falle analog ſind.

hier weitere Anwendungen zu machen, die einmahl keine Schwierigkeiten, und dann auch keinen unmittelbaren Nutzen haben würden.

## §. 141.

In dem vorhergehenden Abſchnitt haben wir geſehen, daß der in P′ M unterſtützte und an ſeinen Enden mit den Gewichten Q′ und Q″ beſchwerte Körper A′ B D M M′ A in demſelben Falle ſich befindet, als wenn er an ſeinen beyden Enden A und A′ unterſtützt, und B D, oder nach irgend einer andern Brechungsebene P P′ mit der Summe der Gewichte Q′ und Q″ beſchwert wäre. Die Figur, welche der Körper haben muß, um in dieſer neuen Lage einen gleichen Widerſtand zu leiſten, iſt alſo durch die Formel ( ) gegeben, nur mit dem Unterſchiede, daß die poſitiven Kräfte des erſten Falles für den zweyten Fall negativ werden müſſen, und ſo umgekehrt.

## §. 142.

Wichtige Bemerkung für die Lage der feſten Körper von gleichem Widerſtande in Rückſicht der Kraft, welche ſie zu zerbrechen trachtet.

Die Fibern, welche wir bisher als die integrirende Theile der elaſtiſchen Körper betrachtet haben, dehnen ſich im Verhältniſſe ihrer Entfernung von der Umdrehungsachſe aus, und da die Summe ihrer Ausdehnungen auf irgend eine Art das Maß des Widerſtandes der Körper iſt, ſo müſſen die Körper, um ihnen den möglich größten Widerſtand zu geben, auf eine ſolche Weiſe unterſtützt werden, daß die längſten Fibern, die folglich auch der längſten Ausdehnung fähig ſind, am weiteſten von der Umdrehungsachſe entfernt werden. Diejenigen Fibern, deren Länge Null iſt, und die ſich daher auch auf keine Weiſe ausdehnen können, müſſen ſich aus demſelben Grunde dieſer Achſe mehr nähern, und mit derſelben zuſammen fallen.

Die Lage eines feſten Körpers von gleichem Widerſtande iſt alſo keinesweges willkührlich; ſondern die Umdrehungsachſe einer jeden Brechungsebene in den converen oder concaven Oberfläche ſeyn, welche durch die verſetzende oder umdrehende Bewegung der die Höhen des feſten Körpers erzeugenden krummen Linie entſtanden iſt.

## §. 143.

Die Unterſtützungen der feſten Körper von gleichem Widerſtande ſind wie gerade Linien, od. auch bloß als Punkte anzuſehen.

Da die Brechungsebene an den Enden feſter Körper von gleichem Widerſtande immer entweder Linien oder bloß Punkte ſind; ſo folgt auch eigentlich daraus, daß die an den Enden frey unterſtützten Körper eine jede ihrer Unterſtützungen nur nach einer geraden Linie oder in einem Punkte berühren; man kann dieſe als feſt und

unbeweglich angenommenen Unterſtützungen folglich auch als gerade Linie oder Punkte anſehen.

---

## Von den feſten Körpern von gleichem Widerſtande, wenn die Laſt eine Funktion des Hebelarmes iſt, woran ſie wirkt.

### §. 144.

*Die Elementar-Theile der Laſt können durch die Ordinaten irgend einer krummen Linie dargeſtellt werden.*

Wir wollen jetzt den feſten Körper B D M M′ A (Fig. 31.) betrachten, der nach ſeiner Brechungsebene B C D E in die Unterſtützung H F horizontal befeſtiget, und in ſeiner ganzen Länge B A mit einem Gewichte E N K A beſchwert iſt, deſſen Elemente als eine Reihe von ſchweren vertikalen Ebenen S q anzuſehen iſt, die keine Adhäſion zn einander haben. Es iſt klar, daß, wenn das Verhältniß dieſer nach verſchiedenen Ebenen zu den Theilen A S der Achſe A B, welchen ſie correſpondiren, gegeben iſt, daß man ſie alsdann durch die Ordinaten S R irgend einer krummen Linie darſtellen kann, deren Achſe die unbeſtimmte Linie B V iſt.

### §. 145.

*Unterſuchung über die allgemeine Gleichung dieſer feſten Körper.*

Für die Dimenſionen A B, B E und B C behalten wir dieſelbe Benennung, wie in den vorhergehenden §§ bey, und machen $AP = x$; $PM = y$; $PM' = z$; die Entfernung des Anfangs der Krümmung T R V von dem gegebenen Ende A des feſten Körpers ſey $= m$; $VS = t$ und $RS = u$. Endlich nehmen wir zwiſchen den Punkten S und A eine andere Ebene S′q′, die der erſteren Ebenn S q unendlich nahe iſt. Die Entfernung S S′ dieſer beyden Ebener ſey $= dt$.

Da dieſe Durchſchnitte ſich wie die correſpondirenden Ordinaten der krummen Linie TRV verhalten; ſo wird das Moment des Körpers S q S′ q′ in Bezug auf die Brechungsebene $PP' = u\,dt\,(x + m - t)$ ſeyn. Und weil zwiſchen dieſer Gewalt und dem Widerſtande der Brechungsebene P P′ das Gleichgewicht Statt hat; ſo erhält man

$$z y^2 = \int - u\,dt\,(x + m - t) + C \;\dots\; (1).$$

Nimmt man an, daß die krumme Linie TRV ihren Anfang V an der andern Seite des Unterſtützungspunktes (Fig. 32.) habe, und behält man dieſelbe Bezeichnung bey; ſo bekommt man

$$zy^2 = \int u\,dt\,(x - m + t) + C \ldots. \ (2).$$

§. 146.

Formel, welche beyde Fälle enthält.

Beyde Fälle kann man in folgende Formel vereinigen

$$zy^2 = \int \mp u\,dt\,(x \pm m \mp t) + C \ldots (3).$$

In dieſe Gleichung muß für u ſein durch eine Funktion von t gegebener Werth ſubſtituirt, und das zweyte Glied ſo integrirt werden, daß man x als eine beſtändige Größe anſieht. Für C muß zur Completirung des Integrals ein ſolcher Werth geſetzt werden, daß für $t = x \pm m$ dieſes zweyte Glied verſchwindet; und endlich hat das erſte Glied ſeinen vollſtändigen Werth, wenn $t = m$ wird.

Man erhält hierdurch alſo das geſuchte Verhältniß zwiſchen x und y, oder zwiſchen x und z, wenn eins von dieſen Verhältniſſen gegeben iſt.

Von allen minder oder mehr intereſſanten Anwendungen der Formel (3) wollen wir nur diejenigen ausführen, welche von praktiſchen Nutzen ſeyn können.

§. 147.

Was aus dieſer Formel für den erſten Fall wird, wenn die Linie TkV gerade iſt.

Unterſuchen wir den erſten Fall dieſer Formel, und ſetzen wir, daß die Linie TRV (Fig. 33.) eine gerade Linie ſey, ſo wird $u = t$, und die Gleichung wird

$$zy^2 = \int - t\,dt\,(x + m - t) + C = -\frac{xt^2}{2} - \frac{mt^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$$

Weil aber dieſe Größe verſchwinden muß, wenn $t = x + m$ wird, ſo iſt

$$-\left(\frac{x+m}{2}\right)^3 + \left(\frac{x+m}{3}\right)^3 + C = 0.$$

Und $c = \left(\frac{x + m}{6}\right)^3$; folglich

$$\int -tdt(x + m - t) + C = -\frac{t^2}{2}(x + m) + \frac{t^3}{3} + \left(\frac{x + m}{6}\right)^3.$$

Für den vollſtändigen Werth, wenn $t = m$ wird, erhält man

$$zy^2 = \frac{x^3 + 3mx_2}{6}.$$

Macht man alle Glieder dieſer Gleichung gleichartig, ſo wird ſie

$$zy_2 = ah_2 \frac{(x^3 + 3mx^2)}{f^3 + 3mf^2} \ldots (4).$$

## §. 148.

Wir betrachten jetzt den zweyten Fall der Formel (3). Indem wir immer $t = u$ ſetzen, ſo erhalten wir nach der Integration

Was nach derſelben Vorausſetzung aus dem zweyten Fall wird.

$$zy_2 = \frac{t^2}{2}(x - m) + \frac{t^3}{3} + C.$$

Da der Werth von $zy^2$ verſchwinden muß, wenn $t = -x + m$ wird, ſo wird er $-\frac{t^2}{2}(-x + m) \div \frac{t^3}{3} + \left(\frac{-x + m}{6}\right)^3$, und endlich für $t = m$ erhält man

$$zy^2 = \frac{-x^3 + 3mx^2}{6}$$

oder

$$zy^2 = \frac{ah^2(-x^3 + 3mx^2)}{-f^3 + 3mf^2} \ldots (5).$$

§. 149.

Formel, welche beyde Fälle mittelſt doppelter Zeichen enthält.

Werden die beyden Formeln (4) und (5) vermittelſt des doppelten Zeichen $\pm$ in eine einzige vereinigt; ſo erhält man

$$zy^2 = ah^2 \frac{(\pm x^3 \mp 3mx^2)}{\pm f^3 \mp 3mf^2} \dots (6).$$

Woraus die Geſetze abgeleitet werden können, nach welcher die Dimenſionen der Brechungsebenen eines feſten Körpers von gleichem Widerſtande ſich verändern müſſen, wenn dieſe Figur BTKA (Fig. 33.) ein Trapez iſt.

§. 150.

Unterſuchung über einzelne in dieſer Formel begriffene Fälle.

Wir nehmen die Gleichung (4) und ſetzen hierbey voraus, daß der Punkt V auf den Punkt A fällt, wo alsdann m = 0 wird. Man erhält alsdann

$$zy^2 = \frac{ah^2x^3}{f^3} \dots (7).$$

§. 151.

Nimmt man an, daß die Linie TRV gerad und horizontal ſey, ſo wird m unendlich, und die Gleichung (4) verwandelt ſich in dieſe

$$zy^2 = \frac{ah^2x^2}{f^2} \dots (8).$$

§. 152.

Fällt der Punkt V auf den Punkt B an dem Ende der Achſe, wo der Körper befeſtigt iſt, ſo iſt m = f, und alsdann erhält man für die Formel (5) folgende Gleichung

$$zy^2 = ah^2 \frac{(-x + 3fx^2}{2f^3} \dots (3).$$

§. 153.

Nimmt man in eben dieſer Formel (5) die Größe m als unendlich an, das heißt, nimmt man an, daß die Linie TRV der Achſe AB parallel ſey; ſo wird

$$z y^2 = \frac{a h^2 x^2}{f^2} \ldots\ldots (10).$$

Das heißt dieſe Formel muß zwar vollkommen gleich ſeyn, welche wir bey derſelben Vorausſetzung nach der Formel (4) erhalten haben.

§. 154.

Wir wollen jetzt in einigen beſondern Fällen das Geſetz der Veränderlichkeit der Brechungsebenen eines feſten Körpers ſuchen. Reſultat aus vorſtehenden Formeln.

Wir wollen alſo in den ſechs Formeln (4), (5), (7), (8), (9) und (10) 1ſtens, $z = a$; 2tens $y = h$ und 3tens $y = z$; ſo erhalten wir aus dieſen drey Hypotheſen 18 Gleichungen, welche ſich auf folgende Art darſtellen laſſen:

$$(A) \ldots\ldots y^2 = h^2 \frac{(x^3 + 3 m x^2)}{f^3 + 3 m f^2}.$$

$$(B) \ldots\ldots z = a \frac{(x^3 + 3 m x^2)}{f_3 + 3 m f^2}.$$

$$(C) \ldots\ldots y^3 = h_3 \frac{(x^3 + 3 m x^2)}{f^3 + 3 m f^2}.$$

$$(D) \ldots\ldots y^2 = h^2 \frac{(- x^3 + 3 m x^2)}{- f^3 + 3 m f^2}.$$

$$(E) \ldots\ldots z = a \frac{(- x^3 + 3 m x^2)}{- f^3 + 3 m f^2}.$$

$$(F) \ldots\ldots y^3 = h^3 \frac{(- x^3 + 3 m x^2)}{- f^3 + 3 m f^2}.$$

$$(G) \ldots\ldots y^2 = \frac{h^2 + x_3}{f^3}.$$

$$(H) \ldots\ldots z = \frac{a x^3}{f^3}.$$

$$(I) \ldots\ldots y^3 = \frac{h^3 x^3}{f^3}.$$

$$(K) \ldots\ldots y^2 = \frac{h^2 x^2}{f^2}.$$

$$(L) \ldots\ldots z = \frac{a x^2}{f^2}.$$

$$(M) \ldots\ldots y^3 = \frac{h^3 x^2}{f^2}.$$

$$(N) \ldots\ldots y^2 = h^2 \frac{(-x^3 + 3 m x^2)}{2 f^3}.$$

$$(O) \ldots\ldots z = a \frac{(-x^3 + 3 m x^2)}{2 f^3}.$$

$$(P) \ldots\ldots y^3 = h^3 \frac{(-x^3 + 3 m x^2)}{2 f^3}.$$

$$(Q) \ldots\ldots y^2 = \frac{h^2 x^2}{f^2}.$$

$$(R) \ldots\ldots z = \frac{a x^2}{f^3}.$$

$$(S) \ldots\ldots y^3 = \frac{h^3 x^2}{f^2}.$$

Es iſt leicht, die dieſen Gleichungen zugehörigen krummen Linien zu verzeichnen, weil keine über den dritten Grad ſteigt. Wir haben es für nützlich gehalten, ſie hier einzeln anzuführen, weil ſie die Form der feſten Körper von gleichem Widerſtande geben, welche von einer im Niveau ſtehenden Flüſſigkeit belaſtet ſind, deren Neigung gegen die vertikale Linie übrigens ſeyn mag, wie ſie wolle, welcher Fall bey den Schützen und Schleuſenthüren oft vorkommt *)

*) Die Anwendung von dieſen Formeln auf die Conſtruktion der Schleuſenthüren haben wir in einer Abhandlung gemacht, der 1792 von der Akademie der Wiſſenſchaften der über dieſen Gegenſtand ausgeſetzte Preis zuerkannt wurde.

§. 155.

Wenn wir, anſtatt wir bisher angenommen haben, daß der Körper in ſeiner Brechungsebene BD befeſtigt ſey, jezt annehmen, daß er nach der Linie DC (Fig. 33.) frey unterſtüzt, und jenſeits des Punktes B gegen A verlängert, und auf dieſer Verlängerung mit einem Syſtem von ſchweren Säulen, deren Oberfläche AKTB iſt, ſo belaſtet ſey, daß ſie der Wirkung des erſtern Syſtems das Gleichgewicht halten: ſo iſt es klar, daß von den Theilen dieſes Körpers an den beyden Seiten des Punktes B daſſelbe gilt, als wenn ein jeder derſelben in dieſem Punkte befeſtigt wäre. Um alſo die Figur des ganzen Körpers zu haben, muß man ſie hiernach für einen jeden der Theile beſonders ſuchen.

Dieſelben Gleichungen dienen auch dazu, die Figur der an ihren Enden unterſtüzten feſten Körper von gleichem Widerſtande zu beſtimmen.

Die allgemeinen Formeln (1) und (2) dienen alſo auch dazu, die Figur der feſten Körper von gleichem Widerſtande zu ſuchen, wenn ſie an irgend einem Punkte ihrer Länge, oder welches, wie wir ſchon geſehen haben, daſſelbe iſt, wenn ſie an ihren Enden frey unterſtüzt ſind.

Zum Beyſpiele: wenn die gerade Linie KTRV die Achſe eines an ſeinen beyden Enden A und A′ frey unterſtüzten feſten Körpers in den Punkt V ſchneidet, und wenn man auf der Achſe dieſes Körpers den Mittelpunkt B die Wirkung der ganzen Laſt beſtimmt hat; ſo iſt nur noch die Figur BDA durch die Gleichung (4), und die Figur des Theiles BDA′ durch die Gleichung (5) zu ſuchen.

---

## Von den feſten Körpern von gleichem Widerſtande, wenn dabey auf die Wirkung ihres eigenen Gewichtes Rückſicht genommen wird.

§. 156.

Der in BD befeſtigte ſchwere Körper BDA (Fig. 34.) wird in allen Punkten ſeiner ganzen Länge auf eine gleiche Weiſe widerſtehen, wenn das Verhältniß der Wirkung irgend eines Theiles APP′ deſſelben zu dem Widerſtande der Brechungsebene, worin dieſer Theil ſich endigt, unveränderlich iſt.

Unterſuchung für die allgemeine Gleichung für ſolche feſte Körper.

Die Wirkung des Theiles A P P′ iſt ſeinem Gewichte, oder da wir die Materie gleichartig annehmen, ſeinem Volumen multiplicirt durch die Entfernung ſeines Mittelpunktes der Schwere von ſeiner Brechungsebene, proportional.

Behält man nun für die Linien P E, B E, B C, A P, P M und P M′ die bisherige Bezeichnung bey; denkt man ſich ferner zwiſchen den beyden Punkten A und P einen Durchſchnitt Q Q′ und ſetzt man $QN' = z'$; $QN = y'$; $AQ = x'$, und bezeichnet man das Volumen des Theiles APP′ durch S; das Volumen des Theiles A Q Q′ aber durch S′; iſt der Mittelpunkt der Schwere des erſtern Theiles von der Brechungsebene P P′ allgemein durch $\frac{x}{n}$; ſo wie der Mittelpunkt der Schwere des zweyten Theiles von der Brechungsebene Q Q′ durch $\frac{x}{n}$ dargeſtellt: ſo gibt die Bedingung des gleichen Widerſtandes folgende Reihe von gleichen Verhältniſſen:

$$zyy : z'y'y' = \frac{Sx}{n} : \frac{S'x'}{n} = S\left(x - \frac{x}{n}\right) : S'\left(x' - \frac{x'}{n}\right)$$

Da nun $zyy = \frac{Sx}{n}$ iſt; ſo iſt auch $zyy = \int\left(x - \frac{x}{n}\right)$. Das zweyte Glied dieſer Gleichung iſt aber das Moment des Körpers APP′ in Bezug auf den Punkt A, und dieſes Moment iſt durch $\int yzxdx$ ausgedrückt, und folglich hat man allgemein

$$zyy = \int yzxdx.$$

Dieſe Gleichung gibt für alle Fälle die Figur der feſten Körper von gleichem Widerſtande, welche durch ihr eigenes Gewicht zerbrochen werden ſollen.

## §. 157.

Dieſe Gleichung iſt nur ein einzelner Fall der § 146 gefundenen Gleichung.

Die eben gefundene Gleichung iſt von der § 146. gefundenen Gleichung $zyy = \int \pm udt(x \mp m \pm t) + C$ nun ein beſonderer Fall, indem dieſe ganz allgemein die Form der feſten Körper von gleichem Widerſtande angibt, wenn das Gewicht eine Funktion des Hebelarmes, woran es wirkt, iſt.

Man gedenke ſich zwiſchen den Punkten A und P (Fig. 34.) das Element Q Q′ q q′, welches durch zwey einander unendlich nahe vertikale Schnitte entſteht; ſo iſt es klar, daß das Moment dieſes Elements in Rückſicht der Brechungsebene P P′ ſeinem Volumen multiplicirt durch ſeine Entfernung von dieſer Brechungsebene gleich iſt. Behält man die Bezeichnung des vorigen § bey, ſo iſt $u = z' y$; $m = o$; $t = x'$. Werden dieſe Werthe in die dieſem Fall entſprechende Formel (§ 145.) ſubſtituirt; ſo wird

$$zyy = \int(-z'y'dx'[x-x']) + C.$$

Die beſtändige Größe C muß ſo ſeyn, daß das zweyte Glied verſchwindet, wenn $x = x'$ wird, alsdann iſt $z'y'dx' = zydx$, und folglich hat man die Gleichung

$$-\int zydx(x-x') + C = o$$

und C wird $= \int zydx\,(x-x')$, und demnach iſt

$$zyy = \int -z'y'dx'(x-x') + \int zydx(x-x').$$

Dieſer Ausdruck wird vollſtändig, wenn $x = o$ wird, und dann hat man $z'y' = o$ vermöge der charakteriſtiſchen Eigenſchaft der feſten Körper. Dieß gibt endlich

$$zyy = \int zyxdx.$$

Welche Formel wir auch eben auf einem ganz andern Wege gefunden haben.

## §. 158.

Wenn die vorſtehende Formel differentiirt wird; ſo erhält man *Allgemeine Formel für die Breitenkrümmung des feſten Körpers.*

$$2zydy + y^2\,dz = zyxdx.$$

und da der Werth einer der unbeſtimmten Größen z oder y durch eine Funktion von x bekannt ſeyn muß; wenn der Werth der andern, als eine Funktion von eben derſelben veränderlichen Größe beſtimmt werden ſoll, ſo ſind die allgemeinen Ausdrücke dafür leicht zu finden.

Man nehme an, es ſey $y = X$; $dy = X'dx$, da X und X′ Funktionen von x ſind; ſo wird die Formel, wenn ſie durch y dividirt wird,

$$2zX'dx + Xdz = zxdx.$$

Nennt man die Zahl, deren Logarithmen 1 iſt, e; ſo wird

$$z = e^{\frac{\int (x\,dx - 2\,X'\,dx)}{x}} + A.$$

Oder wenn für X und X′ d x ihre Werthe ſubſtituirt werden,

$$z = e^{\frac{\int (x\,dx - 2\,dy)}{y}} + A \ldots (1).$$

§. 159.

Allgemeine Gleichung für die Höhenkrümmung.

Setzen wir jetzt $z = X$, und $dz = X'\,dx$, ſo verändert ſich die allgemeine Formel in dieſe

$$2\,X\,dy + y\,X'\,dx + X\,x\,dx$$

Und hieraus erhält man

$$y = e^{-\frac{1}{2}\log. X} \int e^{\frac{1}{2}\log. X}\, \frac{x\,dx}{2} + B.$$

Und wenn man z für X ſubſtituirt

$$y = \frac{1}{\sqrt{(z)}} \int \sqrt{(z)}\, \frac{x\,dx}{2} + B \ldots\ldots (2).$$

§. 160.

Um einige Anwendungen von dieſen Formeln zu machen, nehmen wir anfänglich an, daß die Höhe y der Brechungsebene in der ganzen Länge des feſten Körpers beſtändig, und = h ſey; ſo iſt $dy = 0$ und die Formel (1) wird

$$z = e^{\frac{\int x\,dx}{h}} + A = e^{\frac{x^2}{2h}} + A.$$

Die Conſtante A wird durch die Bedingung beſtimmt, daß für $x = o$ auch $z = o$, und folglich $o = 1 + A$ ſeyn muß. Dieß gibt $A = -1$, und endlich

$$\log. z + 1 = e^{\frac{x^2}{2h}}$$

Welche Gleichung einer transcendenten Linie angehört.

Setzen wir zweytens, daß die Breite z der Brechungsebenen beſtändig, und $= a$, ſo erhält man

$$y = \frac{1}{\sqrt{(a)}} \int \sqrt{(a)} \frac{x\,dx}{2} = \frac{x^2}{4}.$$

Die Conſtante B iſt Null, weil y und x zu gleicher Zeit verſchwinden.

Man ſieht, daß dieſe Gleichung einer auf die Tangente an ihrer Scheitel reducirten gemeinen Parabel zugehört. Um die Glieder homogen zu machen, nennen wir die unbeſtimmte Länge des feſten Körpers allgemein f; es iſt klar, daß alsdann für $x = f$ das $y = h$, folglich $h = \frac{f^2}{4}$ und $y = \frac{h x^2}{f^2}$ iſt.

Jetzt bleibt noch der Werth von f zu beſtimmen. Wir wiſſen, daß für die Wirkung irgend eines Theiles A P P′ des feſten Körpers auf die correſpondirende Brechungsebene der Ausdruck $\frac{a y x^2}{12}$ gilt. Die Wirkung des Ganzen gegen den Unterſtützungspunkt iſt alſo $= \frac{a h f^2}{12} = a h h = \frac{a h b b}{2}$ (§. 68.), und demnach iſt $f = b \sqrt{(6)}$. Wird dieſer Werth von f f in die vorſtehende Gleichung ſubſtituirt, ſo wird ſie

$$y = \frac{h x^2}{6. b b}.$$

Nimmt man endlich an, daß die Brechungsebenen des zu beſtimmenden feſten Körpers ähnlich ſeyn ſollen, ſo hat man $y = z$, und beyde Formeln (1) und (2) geben

$$z = y = \frac{x^2}{6} = \frac{h x^2}{ff}.$$

Eine Gleichung, welche wiederum der auf ihre Tangenten an der Scheitel bezogenen Parabel angehört.

Das Moment irgend eines Theiles dieſes feſten Körpers und die Brechungsebene yy iſt allgemein durch $\frac{yyxx}{30}$ ausgedrückt, und für $y = h$ hat man folglich $\frac{h^2 f^2}{30} = h^3 = \frac{h^2 h^2}{2}$, woraus man f, oder die Länge dieſes neuen Körpers $= b\sqrt{(15)}$ findet, und ſonach wird

$$y = z = \frac{hx^2}{15bb}.$$

Wenn die Größen $ah^2$ und $h^3$ bey den beyden letztern feſtern Körpern gleich ſind, ſo iſt das Verhältniß ihrer Länge, wie 24455 zu 38730.

## §. 161.

*Was aus der Formel § 156. wird, wenn die Schwere des feſten Körpers veränderlich iſt.*

In dem Vorhergehenden haben wir angenommen, daß die Materie des feſten Körpers von gleichem Widerſtande homogen ſey. Es könnte ſich aber auch zutragen, daß das ſpeciſiſche Gewicht deſſelben eine gewiſſe Funktion der Coordinaten x, y und z wäre. Nennen wir dieſe Funktion p, ſo wird die allgemeine Formel für die feſten Körper, welche der Wirkung ihres eigenen Gewichtes gleichförmig widerſtehen,

$$zyy = \int pyzxdx.$$

Woraus man bekommt

$$(3) \ldots\ldots z = e^{\frac{\int pxdx - 2dy}{y}} + A$$

$$(4) \ldots\ldots y = \frac{1}{\sqrt{(z)}} \int \sqrt{(z)} \frac{pxdx}{2} + B.$$

Nimmt man z. B. $p = \frac{1}{x}$ und $z = a$, ſo wird die Formel (4),

$$y = \frac{x}{2}.$$

Und folglich iſt der Körper von gleichem Widerſtande nach dieſer Hypotheſe eine Pyramide oder ein Kegel.

## §. 162.

*Allgemeine Gleichung für ſchwere und feſte Körper vom gleichem Widerſtande, die außer ihrem eigenen Gewichte noch von einer fremden Maſſe belaſtet ſind.*

Anfangs haben wir die feſten Körper von gleichem Widerſtande ſo angeſehen, als wenn ſie nicht ſchwer wären; dann haben wir ſie bloß in der Rückſicht betrachtet, daß ſie der Wirkung ihres eigenen Gewichtes widerſtehen. Es bleibt uns jetzt übrig, Unterſuchungen unter der Vorausſetzung anzuſtellen, daß ſie ſowohl ſchwer ſind, als auch eine fremde Laſt zu tragen haben.

Aus dem Vorhergehenden folgt offenbar, daß die allgemeine Gleichung hierfür iſt

$$z y y = F.(x) + \int p y z x d x,$$

Wird ſie differentiirt, ſo bekommt man

$$2 z y d y + y^2 d z = d.(F.x) + p y z x d x.$$

## §. 163.

*Wenn die Höhenkrümmung gegeben iſt, ſo läßt ſich die Breitenkrümmung beſtimmen.*

Da die Größen F. (x) und p beſtändig Funktion von x und von unveränderlichen Größen ſind, ſo folgt hieraus allgemein, daß man den Werth von z beſtimmen kann, wenn y bekannt iſt, wenn die vorſtehende Formel ſich auf eine Gleichung für eine Linie reduciren wird.

Nimmt man z. B. $d(F.[x]) = X' dx$; $y = X''$; $dy = X''' dx$, ſo hat man

$$2 z X'' X''' dx + X'' X'' dz = X' dx + p X'' z x dx.$$

Und hieraus erhält man

$$z = e^{\frac{-\int 2X''X'''dx - pX''xdx}{X''X''}} \left\{ C + \int \left( e^{\frac{\int 2X''X'''dx - pX''xdx}{X''X''}} \frac{X'dx}{X''X''} \right) \right\}.$$

Oder wenn man für X′, X″, X‴ ihre Werthe ſubſtituirt

$$(5) \ldots z = e^{-\int \frac{2dy - pxdx}{y}} \left\{ C + \int \left( e^{\int \frac{2dy - pdx}{y}} \frac{d.(F.[x])}{yy} \right\} \right.$$

§. 164.

So lange die Größe F. (x) einen reellen Werth haben, ſo lange wird die beſtändige Größe C Null ſeyn, weil für $x = o$ auch $z\,y = o$ iſt, wie auch der Ausdruck von y und z ſeyn möge. Wenn man aber annimmt, daß die Größe F. (x) verſchwindet, das heißt, wenn der widerſtehende Körper nur ſein eigenes Gewicht zu tragen hat, alsdann muß, um den Werth von z zu finden, $C = 1$ ſeyn, weil z ſonſt für die ganze Länge des Körpers Null ſeyn würde, welches abſurd wäre. Wenn man auf dieſe Bemerkung achtet, ſo findet man für F. (x) = o

$$z = e^{\int \frac{pxdx - 2dy}{y}},$$

dieſelbe Gleichung, welche wir ſchon § 157. gefunden haben.

Setzt man in der Formel (5) $p = o$, ſo wird ſie

$$zyy = F.(x).$$

Welche Gleichung wir ſchon im Anfange dieſes Abſchnittes (§ 127.) für nicht ſchwere feſte Körper von gleichem Widerſtande gefunden haben.

§. 165.

Wenn die Breitenkrümmung gegeben iſt, ſo iſt die Höhenkrümmung in einigen Fällen zu beſtimmen.

Die Formel § 162. wo z eine gegebene Funktion von x iſt, kann nicht allgemein integrirt werden; indeß gibt es doch einige Fälle, wo man das Integral finden kann.

§. 166.

Wenn, z. B. z unveränderlich und = a iſt, ſo iſt $x^2$ die einzige Funktion von x, welche als Faktor in dem Gliede F. (x) vorkommt, und die Formel wird

$$2aydy = P'xdx + payxdx,$$

hieraus erhält man $\frac{2\,a\,y\,d\,y}{P' + p\,a\,y} = x\,d\,x$, und wenn man integrirt

$$\frac{2\,y}{p} - \frac{2\,P'}{p^2\,a} \log\,(p\,a\,y + P') + C = \frac{x^2}{2}.$$

Da wir die Breite des feſten Körpers als beſtändig angenommen haben, ſo muß y am Anfange der Abſciſſen Null ſeyn, und folglich man

$$-\frac{2\,P'}{a\,p^2} \log.P' + C = 0$$

dieß gibt endlich

$$\frac{x_2}{2} = \frac{2\,y}{p} + \frac{2\,P'}{a\,p^2} \log.\ \frac{P'}{p\,a\,y + P'}.$$

## §. 167.

Es gibt noch einen Fall, wo man den Werth von y als eine Funktion von x und z leicht findet, wenn nähmlich das ſpecifiſche Gewicht p des widerſtehenden feſten Körpers veränderlich, und der Ordinate y proportional iſt. Nach dieſer Vorausſetzung hat man

$$2\,z\,y\,d\,y + y\,y\,d\,z = d.\,F.\,(x) + z\,y^2\,x\,d\,x.$$

Macht man $y\,y = y'$, ſo ſieht man leicht, daß dieſe Formel einer Linie zukommt (que cette formule devient linéaire) und folglich auf eine allgemeine Art zu integriren iſt.

## §. 168.

Wenn das Glied F.(x) die Ordinate y, das heißt, die Funktion von x, welcher der Werth dieſer Ordinate iſt, zum Faktor hat; ſo wird die Formel §. 162. durch dieſe Funktion zu dividiren und demnach auf folgende zu reduciren ſeyn

$$2\,z\,d\,y = y\,d\,z = F\,(x)\,d\,x + p\,z\,x\,d\,x,$$

welche, wie man ſieht, ſowohl in Rückſicht auf z, als auch in Rückſicht auf y einer Linie zugehört.

§. 169.

Feſte Körper von gleichem Gewichte, die bloß der Wirkung ihres eigenen Gewichtes widerſtehen, kommen bey Bauwerken nicht oft vor.

Obgleich man nach dieſen und nach mehreren andern Hypotheſen den Werth von y, z und x finden kann; ſo darf man doch nicht hoffen, bey großen Bauwerken von Körpern, die auf dieſe Art beſtimmt ſind, Gebrauch machen zu können; vielmehr würden dieſe Körper faſt in allen Fällen unnütz ſeyn, indem ihr Gewicht im Verhältniß desjenigen, welches ſie tragen ſollen, eine ſo kleine Größe iſt, daß man ſie ohne große Folgen vernachläſſigen kann.

Es würde alſo überflüſſig ſeyn, bey der Anwendung der bisher gefundenen Formeln uns noch länger aufzuhalten.

§. 170.

Um einen feſten Körper von gleichem Widerſtande zu beſtimmen iſt es genug das Verhältniß der Ordinaten der erzeugenden krummen Linie zu kennen.

Wir haben geſehen, daß, wenn das Verhältniß zwiſchen x und z gegeben iſt, das Verhältniß zwiſchen x und y unmittelbar daraus gefunden werden kann, und umgekehrt, wodurch alſo die Figur eines feſten Körpers von gleichem Widerſtande zu beſtimmen iſt. Aber dieſe Figur kann gleichfalls beſtimmt werden, obgleich man weder die eine noch die andere von ihren erzeugenden krummen Linien kennt, wenn nur das Verhältniß von z und y gegeben iſt; denn wenn man für y ſeinen, durch eine Funktion von z gegebenen Werth in die Formel ſubſtituirt, ſo hat man

$$zyy = F.(x) + \int pyzx\,dx.$$

Dieſe Gleichung enthält nur zwey veränderliche Größen z und x, und gibt folglich das Verhältniß zwiſchen den Coordinaten der Breitenkrümmung. Eben ſo findet man die Höhenkrümmung, wenn man für z deſſen durch y gegebenen Werth in die Formel ſubſtituirt.

§. 171.

Von den feſten Körpern von gleichem Widerſtande, deren Maſſe ein Größtes oder ein Kleinſtes iſt.

Unter der unendlichen Anzahl von Fragen, welche man in Bezug auf die feſten Körper von gleichem Widerſtande aufſtellen kann, haben wir folgende gewählt, weil ſie uns die nützlichſte zu ſeyn ſcheint.

Unter allen feſten Körpern von gleichem Widerſtande, die von einerley Länge, und im Stande ſind einer bekannten Wir-

kung widerſtehen zu können, d. h. deren Brechungsebenen gegeben ſind, ſoll derjenige beſtimmt werden, deſſen Volumen ein Maximum oder ein Minimum iſt.

Wir gebrauchen das Zeichen $\delta$, um die unendlich kleinen Differenzen, welche man Variationen nennt, damit zu bezeichnen, und um ſie von den gewöhnlichen Differentialen zu unterſcheiden.

Behalten wir für gleiche Größen die bisherige Bezeichnung bey, wo wird das Volumen des geſuchten Körpers allgemein durch $\int yz\,dx$ ausgedrückt werden können, welche Formel ein Größtes oder ein Kleinſtes werden muß. Man hat alſo

$$\delta \int yz\,dx = 0.$$

Oder durch das Fundamental-Theorem der Variations Methode

$$\int \delta (yz\,dx) = \int (yz\,\delta dx + dx\,\delta [yz]) = 0.$$

Man hat aber nach demſelben Theorem auch noch $\delta dx = d.\delta.x$, wodurch der vorige Ausdruck in dieſen verwandelt wird

$$\int (yz\,d.\delta x + dx\,\delta [yz]) = 0.$$

Oder weil

$$\int yz\,d.\delta x = yz\,\delta x - \int \delta x\,d\,(yz)$$

ſo iſt

$$yz\,\delta x + \int (dx\,\delta [yz) - \delta x\,d\,(yz]) + C = 0.$$

Die Conſtante C muß, wenn das Integral $\int (dx\,\delta [yz) - \delta x d\,(yz])$ gleich Null iſt, dem Gliede $yz\,\delta x$ gleich ſeyn, Dieſes Integral iſt aber bey ſeiner Entſtehung, d. h. an dem Ende A des feſten Körpers, wo $x = 0$ iſt, auch Null. Man hat folglich auch $yz\,dx = 0$, und ſonach iſt auch die Conſtante C gleich Null. Nimmt man ferner $\int (dx\,\delta [yz) - \delta x d\,(yz])$ für die ganze Ausdehnung, d. h. von dem Ende A (Fig. 34.) an bis zu der Brechungsebene am Unterſtützungspunkte; ſo wird die Größe $yz\,dx = ah\,\delta f$, und folglich hat man für die Gleichung des Größten und Kleinſten

$$ah\,\delta f + \int (dx\,\delta [yz) - \delta x d (yz]) = 0.$$

Aber da die Variation irgend eines Punktes der beyden krummen Linien, deren Ordinaten y und z ſind, von der Variation aller andern Punkte unabhängig iſt; ſo gibt die vorſtehende Gleichung

$$(1) \ldots\ldots \; dx\,\delta(yz) - \delta x\,d(yz) = 0.$$

welches in der ganzen Ausdehnung des feſten Körpers Statt hat; ferner

$$(2) \ldots\ldots \; ah\,\delta f = 0$$

welches bloß anzeigt, daß die der Brechungsebene a h correſpondirende Länge f nicht variirt.

Die allgemeinſte Gleichung, welche ausdrückt, daß der Körper in allen ſeinen Punkten auf eine gleiche Weiſe widerſtehen muß, iſt dieſe (§ 162.)

$$zy^2 = F.(x) + \int pyzx\,dx$$

Differentiirt gibt ſie

$$2yz\,dy + y^2\,dz = F'.(x)\,dx + pyzx\,dx.$$

Man bekommt alſo

$$dx = \frac{2zy\,dy + y^2\,dz}{(F'.(x) + pyzx)}$$

$$\text{und } \delta x = \frac{2zy\,\delta y + y^2\,\delta z}{(F'.(x) + pyzx)}.$$

Wird dieſer Werth von $\delta x$ in die Formel (1) ſubſtituirt, und wird zugleich der angedeutete Calcul ausgeführt, ſo findet man

$$dx\,(y\,\delta z + z\,\delta y) - \frac{(2zy\,\delta y + y^2\,\delta z)}{(F'.(x) + pyzx)}\,(y\,dz + z\,dy) = 0.$$

Setzt man jetzt die Coefficienten der Variationen $\delta z$ und $\delta y = 0$, ſo erhält man folgende zwey Gleichungen.

$$d.(F.(x) + \int pyzx\,dx)\,y - y^3\,dz - y^2 z\,dy = 0$$

$$d.(F.(x) + \int pyzx\,dx)\,z - 2y^2 z\,dx - 2z^2 y\,dy = 0.$$

Oder, wenn man die erſte mit y und die zweyte mit z dividirt

$$(3) \ldots\ldots d.(F.(x) + \int pyzxdx) - y^2 dz - yz\, dy = 0$$

$$(4) \ldots\ldots d.(F.(x) + \int pyzxdx) - 2y^2 dz - 2zy dy = 0.$$

Subtrahirt man die zweyte von der erſten, ſo erhält man

$$(5) \ldots\ldots ydz + zdy = 0.$$

Addirt man die beyden Gleichungen (3) und (4), und beobachtet man dabey, daß $d.(F.(x) + \int pyzxdx) = y^2 dz + 2zy\, dy$ iſt, ſo findet man, wenn die nöthigen Reductionen vorgenommen ſind

$$(6) \ldots\ldots y\,dz - z\,dy = 0.$$

Werden nun die beyden Formeln (5) und (6) vereinigt, ſo entſteht daraus

$$(7) \ldots\ldots ydz \pm z\,dy = 0.$$

Woraus die Figur des feſten Körpers von gleichem Widerſtande, deſſen Volumen ein Größtes oder ein Kleinſtes iſt, allgemein zu beſtimmen iſt, nachdem entweder das Zeichen + oder — gibt.

Im erſten Fälle gibt dieſe Formel, wenn ſie integrirt iſt,

$$zy = \text{Conſtante} = ah.$$

Weil dieſe Conſtante ſo ſeyn muß, daß für $z = a$ man $y = h$ hat. Hieraus ergibt ſich, daß unter allen feſten Körpern von gleichem Widerſtande derjenige das möglich größte Volumen hat, deſſen Brechungsebene eine unveränderliche Fläche, und deſſen Höhe und Breite variiren, wie die Coordinaten einer Hyperbel zwiſchen ihren Aſymptoten.

Wird der zweyte Fall der Formel (7) integrirt, ſo findet man

$$y = \frac{hz}{a}.$$

Woraus man ſieht, daß die Höhen der Brechungsebenen eines feſten Körpers von gleichem Widerſtande, deſſen Volumen ein Minimum iſt, den Breiten proportional ſind, d. h. daß dieſe Brechungsebenen ſich ähnlich ſind.

---

## Von den feſten Körpern von gleichem abſolut poſitiven Widerſtande. Geſetz der Abnahme der Elemente einer ſchweren Kette.

### §. 172.

*Der abſolut poſitive Widerſtand iſt unabhängig von der Ausdehnbarkeit der Fibern.*

Da der Bruch der Fibern eines parallel mit ſeiner Länge gezogenenen feſten Körpers nur in dem Momente Statt finden kann, wenn ſie die ihnen möglich größte Ausdehnung erhalten haben; ſo kann der Grad ihrer Ausdehnbarkeit in dem Ausdrucke für ihren Widerſtand nicht vorkommen. Der feſte Körper muß alſo in dem Augenblick des Bruches als unausdehnbar betrachtet, und in die Claſſe derjenigen gerechnet werden, deren Brechungsebenen ſich nur adhäriren, weil ihre Theile genau an einander anliegen.

Die abſoluten Kräfte, welche nach den verſchiedenen Brechungsebenen den Bruch hervorzubringen trachten, ſind alſo dieſen Ebenen proportional.

### §. 173.

*Allgemeine Gleichung für ſolche Kö per, welche ihrem eigenen Gewichte widerſtehen.*

Wir nehmen an, die krummen Linien, wornach die Dimenſionen der Brechungsebenen des geſuchten Körpers variiren, durch die Linien $BMA$; $DM'A'$ (Fig. 35.) dargeſtellt ſeyn, und machen $CP = x$; $PM = y$; $PM' = z$; $CB = h$ und $DC = a$.

Man weiß, daß ein Prisma von einerley Materie und von einerley Brechungsebenen $ah$, wenn es vertikal aufgehängt iſt, durch ſein eigenes Gewicht den Bruch am oberſten Ende machen wird; man weiß ferner, daß, wenn die Wirkung dieſes Gewichtes mit dem Widerſtande der Brechungsebene im Gleichgewichte iſt, man die Gleichung $ah = ahb$ hat, wo $b$ die Länge dieſes Prisma's iſt.

Es iſt klar, daß das Gewicht des Theiles B D M′ M des feſten Körpers B D M′ M A $= \int zydx$ iſt. Die Bedingung des Gleichgewichtes zwiſchen dem Widerſtande der Brechungsebene z y und dem Gewichte P P′ A gibt

$$zy = ahb - \int yzdx.$$

Man hat alſo die Proportion

$$ah : ahb = zy : ahb - \int yzdx.$$

Wird dieſe Gleichung differentirt, und hernach integrirt, ſo bekommt man

$$b.\log. zy = -x + A.$$

Da für $x = 0$ man $zy = ah$, ſo iſt die beſtändige Größe $A = \log. ah$, und endlich

$$b.\log. \frac{zy}{ah} = -x.$$

Aus dieſer Formel ſieht man, daß die Länge des feſten Körpers von gleichem abſoluten Widerſtande unendlich iſt, die Brechungsebene mag ſeyn, wie ſie wolle.

§. 174.

Setzt man die eine der Dimenſionen $z = a$, oder $y = h$, ſo findet man nach dieſen beyden Hypotheſen — *Was aus dieſer Gleichung wird, wenn z oder y unveränderlich ſind.*

$$b.\log. \frac{y}{h} = -x$$

$$\text{und } b.\log. \frac{z}{a} = -x.$$

Welche Gleichungen dem negativen Arme einer logarithmiſchen Linie angehört, deren Subtangente $= b$ iſt.

§. 175.

Wenn die Brechungsebenen ähnliche Figuren ſind, ſo daß $z = y$ und $a = h$ iſt; ſo wird — *Wenn die Brechungsebenen ähnlich ſind.*

$$b.\log. \frac{yy}{aa} = 2\,b.\log. \frac{y}{a} = -x.$$

Ein dieſem Falle entſprechender feſter Körper iſt alſo durch eine logarithmiſche Linie erzeugt, deren Subtangente $= 2\,b$ iſt.

Aus der Vergleichung der beyden vorſtehenden Gleichungen erſieht man ferner, daß die Subtangente für die logarithmiſche Linie des erſten Falles die Hälfte der Subtangente der logarithmiſchen Linie für den zweyten iſt.

§. 176.

Allgemeine Gleichung für ſolche feſte Körper, wenn ſie ein fremdes Gewicht erhalten müſſen.

Die Figur eines feſten Körper von gleichem abſolut poſitiven Widerſtande, wenn er ein fremdes Gewicht tragen muß, iſt leicht zu beſtimmen.

Für den unbeſtimmten feſten Körper BDMM′B kann man an den Volumen gleichen Prismen BDRN (Fig. 36.) ſubſtituiren. Verlängert man die Linie AB bis A′, und ſetzt man die Linie BP″ $=$ x, und werden endlich die Dimenſionen der dieſem Punkte correſpondirenden Brechungsebene z und y genannt, ſo erhält man

$$ah : ahb = zy : ahb + \int yz\,dx,$$

das vollſtändige Integral hiernach iſt

$$b.\ \log.\ \frac{zy}{ah} = x.$$

Dieſe Gleichung iſt von der oben (§ 173.) gefundenen nur darin verſchieden, daß die Abſciſſe x das poſitive Zeichen bekommt. Die erzeugende krumme Linie für den geſuchten feſten Körper iſt alſo nach beyden Vorausſetzungen einerley. Sie iſt nähmlich, wie wir ſchon geſehen haben, eine logarithmiſche.

§. 177.

Beyſpiel von dem Nutzen dieſer Theorie in der Anwendung.

Die Theorie der feſten Körper von gleichem abſoluten Widerſtande kann für die Anwendung nützlich werden. Wenn z. B. eine große Laſt auf eine beträchtliche Höhe gehoben werden ſoll, ſo werden die Glieder der Kette gewöhnlich alle gleich ſtark gemacht. Indeß iſt es klar, daß ein jegliches Glied außer der zu hebenden Laſt auch noch das Gewicht aller untern Glieder der Kette mit zu halten hat. Der Widerſtand der Glieder, d. h. die Dimenſionen ihrer Brechungsebenen müſſen alſo

wie die Ordinaten einer logarithmiſchen Linie abnehmen, wenn die Kette möglichſt leicht werden ſoll.

In einer 1789 *) herausgegebenen Abhandlung haben wir die Vortheile auseinander geſetzt, welche ſolche Ketten, im Vergleich mit dem bis jetzt gewöhnlichen, im Gebrauche gewähren.

---

## Von den feſten Körpern von gleichem abſolut negativen Widerſtande. Anwendung auf die Figur der Säulen.

### §. 178.

Wenn ein feſter Körper parallel mit der Länge ſeiner Fibern belaſtet iſt, und wenn dabey auf ſeine Schwere in dem Ausdruck für das Gewicht, welches ihn zu biegen im Stande iſt, nicht Rückſicht genommen wird; ſo iſt die cylindriſche Form die beſte, weil, wenn die Höhe und die Feſtigkeit unveränderlich iſt, der Cylinder nach dieſer Hypotheſe derjenige Körper iſt, der den größten Widerſtand leiſtet, wie Lagrange bewieſen hat **). Wenn aber das Gewicht des Körpers, als ein Theil desjenigen angeſehen wird, welches ihn biegt, ſo muß man ſeine Figur nach der Bedingung beſtimmen, daß er der Biegung in allen Punkten ſeiner Höhe gleichförmig widerſtehen ſoll.

Vortheilhafteſte Figur der als nicht ſchwer angenommenen aber an ihrem Ende beſchwerten feſten Körper.

### §. 179.

Wir wollen Anfangs den einfachſten Fall betrachten, dieſen nähmlich, wenn der feſte Körper, deſſen erzeugende krumme Linien beſtimmt werden ſollen, nur ſein eigenes Gewicht zu halten hat.

Gleichung für feſte Körper von gleichem abſolut negativen Widerſtande, wenn ſie bloß durch ihr eigenes Gewicht belaſtet ſind.

Wir nehmen an, daß die vertikale Linie A B (Fig. 37. Tab. II.) der Durchſchnitt zweyer Ebenen A D M und A E N ſey, auf welchen die erzeugenden krummen

---

*) Iournal de Phyſique, Iuillet 1789.

**) Memoires de l'Academie de Turin, Tome V.

Linien DMI und EN verzeichnet ſind. Jetzt legen wir durch irgend einen in der gemeinſchaftlichen Achſe AB befindlichen Punkt P eine horizontale Ebene, welche auf der Oberfläche des feſten Körpers den Durchſchnitt, oder die Brechungsebene PMNQ bezeichnet; wo die Seite PN die Umdrehungsachſe iſt, um welcher die Biegung erfolgen muß.

Es ſey nun die Höhe des Körpers $= l$; $AD = h$; $AE = a$; $AP = x$; $PM = y$ und $PN = z$.

Bringt man nun an dem Ende B irgend eine Kraft A an, die perpendikulär auf ſeine Länge von B gegen S gerichtet iſt; ſo wird, da der Körper als unbeweglich auf die Ebene HF angenommen iſt, das Moment dieſer Kraft in Bezug auf die Umdrehungsachſe $PN = A(l - x)$ ſeyn.

Da dieſe Gewalt dahin ſtrebt, den Körper PQRI gegen den Punkt S zu neigen, ſo wird ein Theil des Körpers an der andern Seite der vertikalen Linie AP zu liegen kommen. Iſt nun das Gewicht dieſes Theiles $= V$, und die Entfernung des Mittelpunktes ſeiner Schwere von der geraden Linie $AP = t$; ſo wird ſein Moment in Bezug auf $PN = Vt$ ſeyn, und da es nach derſelben Richtung, wie die horizontale Kraft A wirkt: ſo iſt die Gewalt, welche die Biegung hervorzubringen trachtet $= Vt + A(l - x)$.

Dieſer Gewalt wird durch den übrigen Theil des feſten Körpers, welcher zur rechten der vertikalen Linie AP geblieben iſt, und durch den Widerſtand der Brechungsebene PMNQ das Gleichgewicht gehalten. Heißt die Maſſe dieſes Theiles des feſten Körpers $V'$, und iſt $t'$ die Entfernung des Mittelpunktes ſeiner Schwere von der geraden Linie AP; ſo hat man die Gleichung

$$Vt + A(l - x) = V't' + mzyy.$$

Wo m ein unveränderlicher Coefficient iſt, der von der ſpecifiſchen Elaſticität der Materie, woraus der Körper beſteht, abhängt. Wenn man aber die horizontale Kraft A gleich Null, und den feſten Körper, in dem Augenblick, wo er ſich in P krümmt, noch horizontal annimmt; ſo verſchwindet das erſte Glied dieſer Gleichung, und es bleibt

$$V't' + mzyy = o.$$

Man muß hierbey bemerken, daß $V' t'$ das Moment des ganzen Theiles von oben an bis zu der Brechungsebene P Q in Bezug auf die Ebene A E R iſt.

Nimmt man nun irgend ein Element $P' M' N' Q'$, und macht $AP' = x'$; $P' M' = y'$: $P' N' = z'$; ſo hat man

$$V' t' = \frac{\int y' y' z' dx'}{2} + C.$$

Welcher Ausdruck verſchwindet, wenn $z' y' = 0$ wird. Es iſt alſo $C = 0$. Und da das Integral $\frac{\int y' y' z' dx'}{2}$ bis P M geht; ſo wird der Werth complett, wenn $z' y' = zy$, und $x' = x$ iſt. Folglich hat man

$$\frac{\int yyzdx}{2} + mzyy = 0.$$

Wird dieſe Gleichung differentiirt, ſo iſt

$$-dx = \frac{2m\, d.(zyy)}{zyy}.$$

Und eine neue Integration gibt

$$-x = 2m \log.(zyy) + A.$$

Die Conſtante wird beſtimmt durch die Bedingung, daß für x Null $z = a$ und $y = h$ ſeyn muß. Dieß gibt

$$A = -2m \log. ahh$$

und endlich

$$-x = m \log. \frac{zyy}{ahh}.$$

eine Gleichung für eine krumme Oberfläche, woraus man durch ähnliche, wie § 131 und 173 angeſtellte Betrachtungen, ſchließt, daß es eine unendliche Menge feſter Körper von gleichem abſolut negativen Widerſtande geben kann, deren Brechungsebenen dem Geſetze der Continuität unterworfen oder nicht unter-

worfen ſind, und daß dieſe Körper eine unendliche Höhe haben, und daß ihre Brechungsebenen von unten nach oben immer kleiner werden.

§. 180.

Jetzt iſt nur noch der beſtändige Coefficient m zu beſtimmen, welcher in der eben gefundenen Gleichung vorkommt, die den Subtangenten einer logarithmiſchen Linie zugehört, deren Ordinaten allgemein durch $\frac{zyy}{ahh}$ darzuſtellen ſind. Hierzu nehmen wir ein vertikal auf der horizontalen Ebene errichtetes Prismen von durchaus gleicher Materie und von gleichen Brechungsebenen a h an. § 124 haben wir geſehen, daß es, bey einer gehörigen Höhe H, ſich in ſeiner Mitte biegen wird. Betrachtet man nun das Prismen in dem Momente in welchem es ſich biegt, und wendet man hier wieder das Raiſonnement § 179. an; ſo erhält man

$$\frac{Hahh}{4} + mahh = o$$

wo $m = -\frac{H}{4}$ den Werth gibt, der, wenn er in die vorſtehende Gleichung ſubſtituirt wird, ſie dahin umändert, daß

$$x = \frac{H}{2} \log: \frac{zyy}{ahh}$$

wird, wo ſelbſt H die größte Höhe bedeutet, zu welcher ein Prismen von gleicher Materie und gleichen Brechungsebenen aufführen kann, ohne daß es ſich ſichtlich zu biegen anfängt.

§. 181.

Wie dieſe Gleichung für einige beſondere Fälle ſich umändert.

Setzt man in dieſer Formel nach einander $z = a$; $y = h$; und $y = z$: ſo bekommt man

$$1\text{ſtens } x = \frac{H}{2} \log. \frac{yy}{hh} = H \log. \frac{y}{h}.$$

$$2\text{tens } x = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{H}{2} \log. \frac{z}{a}.$$

$$3\text{tens } x = \frac{H}{2} \log. \frac{y^3}{h^3} = \frac{3H}{2} \log. \frac{y}{h}.$$

Setzt man alſo, nach den drey angenommenen Hypotheſen, die untern Grundflächen der drey feſten Körper gleich; ſo verhalten ſich die Subtangenten der erzeugenden logarithmiſchen Linien zu einander $= 1 : \frac{1}{2} : \frac{3}{2}$.

§. 182.

Aus dem bisher Geſagten geht hervor, daß eine Säule, welche durch die Umdrehung einer logarithmiſchen Linie entſtanden iſt, deren Subtangenten § 181 beſtimmt wurden, der Wirkung ihres eigenen Gewichtes einen gleichen Widerſtand entgegen ſetzt. Da das Volumen eines zwiſchen dem obern Ende und irgend einer Brechungsebene enthaltenen Theiles PMO (Fig. 38.) dieſer Säule genau anzugeben, und deſſen Gewicht alſo endlich iſt; ſo kann man auch dieſen Theil wegnehmen, und dafür eine gleiche Maſſe G G′ ſubſtituiren, wenn nur deren Mittelpunkt der Schwere in die Verlängerung der Achſe des bleibenden Theiles ADPM fällt, und dieſer bleibende Theil wird nun, ſowohl ſeinem eigenen Gewichte, als auch der fremden Laſt einen gleichen Widerſtand leiſten. Die Form, welche eigentlich den Säulen zukommt, iſt alſo ein durch die Umdrehung um ihre Achſe beſchriebenes Conoid. *Wie das Bisherige auf die Figur der Säulen anzuwenden iſt.*

Da aber die Subtangente $\frac{3H}{2}$ dieſer logarithmiſchen Länge im Verhältniß zu dem Durchmeſſer der Grundfläche und zu der Höhe des feſten Körpers ſehr groß iſt, oder, was daſſelbe iſt, da das eigene Gewicht der Säule im Verhältniß zu der Laſt, die ſie tragen kann, ehe ſie ſich biegt, ſehr klein iſt, ſo muß der erzeugende Bogen faſt mit einer geraden, der Umdrehungsachſe parallelen Linie zuſammen fallen, und ſonach muß alſo auch das Conoid dem Cylinder ſehr nahe kommen, welches mit dem anfänglich erhaltenen Reſultat übereinſtimmt, als von ihrem eigenen Gewichte abſtrahirt wurde.

---

## Von den Punkten des kleinſten und größten Widerſtandes der feſten Körper.

§. 183.

Definition von den feſten Körpern des kleinſten und größten Widerſtandes.

Unter der unendlichen Anzahl der Körper, deren erzeugenden krummen Linien dem Geſetze der Stetigkeit unterworfen ſind, und welche nicht die Eigenſchaft haben, daß ſie der Wirkung einer beſtimmten Gewalt, die ſie zu zerbrechen ſtrebt, in allen ihren Punkten einen gleichen Widerſtand leiſten, ſind einige von einer Reihe von Brechungsebenen zuſammen geſetzt, deren Widerſtand nicht hinreicht, um der denſelben correſpondirenden Gewalt das Gleichgewicht zu halten; andere haben in ihrer ganzen Länge Brechungsebenen, welche der Gewalt, die auf eine jede wirkt, mit einer überflüſſigen Kraft widerſtehen.

Alexander Marchetti, welcher einige Jahre hernach, als Galilei ſeine Geſpräche herausgegeben hatte, über den Widerſtand der feſten Körper geſchrieben hat, nannte die erſtern corpora minoris reſiſtentiae, und die zweyten corpora majoris reſiſtentiae. Wir wollen dieſe Benennung beybehalten.

§. 184.

Was man unter dem Brechungspunkt und dem Punkt des größten Widerſtandes verſteht.

Man ſieht leicht ein, daß bey Körpern vom kleinſten Widerſtande in irgend einem Punkte ihrer Länge eine Brechungsebene ſich finden muß, welche der Gewalt, die auf ſie wirkt, mit der möglich kleinſten Kraft widerſteht. Dieſe Ebene wird alſo von allen am erſten brechen, und der Punkt in der Achſe, dem ſie correſpondirt, heißt der Brechungspunkt.

Eben ſo erkennt man auch leicht, daß in den feſten Körpern vom größten Widerſtande eine Brechungsebene exiſtiren muß, welche mehr, als alle anderen widerſteht. Die Lage dieſer Ebene in Bezug auf den Anfang der Coordinaten des gegebenen feſten Körpers wird, wie wir gleich ſehen werden, eben ſo wie der Brechungspunkt beſtimmt.

§. 185.

Allgemeine Formel zur Beſtimmung dieſer Punkte.

Wenn ein feſter Körper mit irgend einem Gewichte belaſtet, gegeben iſt, ſo kann man denſelben immer in einen andern von gleicher Länge verwandeln, welcher demſelben Gewichte, wenn es dieſelbe Lage hat, in allen Punkten einen gleichen Wi-

derſtand leiſtet; wenn man nähmlich eine von den beyden erzeugenden krummen Linien des erſten Körpers auch für dieſen beybehält, und für die zweyte krumme Linie eine andere nach den Umſtänden beſtimmt.

Wenn alſo die Dimenſionen der Brechungsebene irgend eines gegebenen feſten Körpers z und y ſind, und wenn man die Coordinaten der neuen Krümmung z′ und x nennt, wornach alſo die Breite der Brechungsebenen ſich abändern muß, um den Körper von gleichem Widerſtande zu bilden; die Höhen dieſer Brechungsebenen aber die erſtern bleiben: ſo wird die Gleichung für die Figur dieſes neuen feſten Körpers allgemein folgende ſeyn

$$z' y^2 = F. (x) \ldots\ldots (1)$$

in welcher der Ausdruck F. (x) das Moment des Gewichtes darſtellt, das den Bruch hervorzubringen ſtrebt.

Wird aber die Breitenkrümmnng beybehalten und nennt man y′ und x die Coordinaten der neuen Höhenkrümmung, um den gegebenen feſten Körper in einen andern von gleichem Widerſtande um zu formen; ſo iſt dafür die Gleichung

$$z y' y' = F. (x) \ldots\ldots (2).$$

Da das zweyte Glied in den beyden vorſtehenden Gleichungen ein und daſſelbe iſt; ſo ſind auch z′ y y und z y′ y′ einander gleich; weichen aber von dem Ausdruck für den Widerſtand der gleichen Abſciſſen correſpondirenden Brechungsebene des gegebenen Körpers, oder von z y y mehr oder weniger ab.

Hieraus erſieht man nun leicht, daß derjenige Punkt der Achſe dieſes feſten Körpers, anwelchem der Unterſchied des einen oder des andern dieſer beyden erſtern Ausdrücke in Vergleichung mit dieſem zweyten ein Maximum iſt, der geſuchte Punkt des kleinſten oder des größten Widerſtandes ſeyn muß.

Man erhält alſo die Gleichungen

$$d (z' y y - z y y) = 0 \text{ und } d (z y' y' - z y y) = 0$$

welche hinreicht, die Lage dieſer Punkte zu beſtimmen, weil ihre Glieder bekannte Funktionen von x ſind.

§. 186.

Einige Anwendung von dieſen Formeln.

Nehmen wir z. B. an, daß der feſte Körper BDA (Fig. 39. Tab. III.) in ſeiner Brechungsebene BD feſt unterſtützt, und an dem Ende A mit einem Gewichte R belaſtet ſey; iſt die Figur ferner eine rechtwinkeliger Keil, und deſſen Grundfläche horizontal: ſo haben wir

$$(1) \ldots\ldots z'yy = zy'y' = F.(x) = \frac{ah^2x}{f} \quad (\S\ 136.)$$

$$(2) \ldots\ldots zyy = \frac{ah^2x^2}{f^3}$$

werden nun die Werthe von $z'yy$ und von $zyy$ in die Formel $d(z'yy - zyy) = 0$ ſubſtituirt; ſo hat man

$$d.\left(\frac{ah^2x}{f} - \frac{ah^2x^2}{f^2}\right) = 0.$$

Nach vorgenommener Differentiirung, und nach den nöthigen Reductionen ererhält man $x = \frac{f}{2}$.

Aus der Gleichung $z'yy = \frac{ah^2x}{f}$ leitet man, für $y = \frac{hx}{f}$ und für $z' = \frac{af}{x}$, die Gleichung für eine auf ihre Aſymptoten bezogne Hyperbel ab.

Setzt man in dieſe letzte Gleichung $x = \frac{f}{2}$; ſo findet man $z' = a$, eine Größe größer als die beſtändige Breite $a$ des feſten Körpers. Der gefundene Punkt iſt alſo ein Brechungspunkt.

§. 187.

Jetzt wollen wir den Brechungspunkt eines an ſeinen beyden Enden A und A' (Fig. 40.) unterſtützten, und mit einem unveränderlichen Gewichte beſchwerten Doppelkegel ſuchen.

Die Gleichung $d.(y'^3 - y^3)$ wird den geſuchten Punkt geben.

Subſtituirt man die Werthe von $y'$ und $y$ durch die Funktion von $x$, ſo wird ſie

$$d\left(\frac{h^3}{f^3}(2fx - xx) - \frac{h^3x^3}{f^3}\right) = 0.$$

Und wenn alle Reductionen gemacht ſind, hat man

$$2f^2 = 3x^2 - 2fx,$$

und folglich

$$x = -\frac{f}{3} \pm \frac{f}{3}\sqrt{(7)} = \frac{f}{3}(-1 \pm 3{,}6457).$$

Man findet für $x$ zwey Werthe, wie es die ſymmetriſche Form des feſten Körpers mit ſich bringt.

Iſt endlich des feſten Körpers B D A (Fig. 41.) Erzeugungslinie eine Parabel E M′ A, und die Achſe A B an ihrem Ende A die Tangente einer andern Parabel A M C, und iſt dieſer Körper mit einem Syſtem ſchwerer Säulen beſchwert, welche ſich unter einander wie die correſpondirenden Elemente des Trapez's B T K A verhalten; ſo hat man

$$1\text{ſtens} \ldots z'yy = zy'y' = ah^2 \frac{(x^3 + 3mx^2)}{f^3 + 3mf^2}$$

$$2\text{tens} \ldots zyy = ah^2 \frac{(x^{\frac{9}{2}})}{f^{\frac{9}{2}}}$$

dieſe Werthe von $z'yy$ und $zy'y'$ in die Gleichung

$$d(z'yy - zy'y') = 0$$

geſetzt, verwandelt dieſe Gleichung in

$$d.\left(\frac{x^3 + 3mx^2}{f^3 + 3mf^2} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{f^{\frac{9}{2}}}\right) = 0$$

woraus man bekommt

$$x^{\frac{5}{2}}(9f^2 + 27\,mf) - 6\,x^{\frac{7}{2}} - 12\,mf^{\frac{7}{2}} = 0.$$

eine Gleichung, welche, wenn ſie aufgelöſet wäre, den geſuchten Punkt geben würde.

Wenn der Punkt V auf den Punkt A fiele; ſo würde das Trapez B K ein Triangel A T B, und die Größe A V = m verſchwände. Alsdann erhielte man aus vorſtehender Gleichung dieſe

$$9x^{\frac{5}{2}} f^2 = 6\,x f^{\frac{7}{2}}$$

und endlich nach den gehörigen Reductionen

$$x = f \sqrt[3]{\left\{\left(\frac{6}{9}\right)^2\right\}}.$$

Nimmt man an, daß die Linie T K der Achſe A B parallel ſey, ſo iſt m unendlich, und folglich ſind in der allgemeinen Gleichung für den Brechungspunkt alle die Glieder, welche nicht mit m multiplicirt ſind, außer Acht zu laſſen. Dieſe Gleichung wird alſo

$$27 m x^{\frac{5}{2}} = 12\, f^{\frac{5}{2}}\, m.$$

dieß gibt $x = f \sqrt[3]{\left\{\left(\frac{12}{27}\right)^2\right\}}.$

§. 188.

Formel für die Punkte des kleinſten oder größten abſoluten Widerſtandes.

Mit derſelben Leichtigkeit kann man die Punkte des kleinſten und größten Widerſtandes auch alsdann finden, wenn die feſten Körper parallel mit ihren Fibern Widerſtand leiſten. Die allgemeine Formel, welche dazu dient, die Lage dieſer Punkte zu beſtimmen, iſt dieſe: $d(z'y - zy) = 0$, wie ſich aus den eben entwickelten Grundſätzen ergibt. Es iſt nicht nöthig, ihre Anwendung noch aufs neue zu zeigen.

§. 189.

Obgleich wir in dieſem Abſchnitte nur ſolche feſte Körper von gleichem Widerſtande betrachtet haben, deren Brechungsebenen rechtwinkelig waren; ſo kann doch diebisher entwickelte Theorie auch auf ſolche Körper angewandt werden, deren Brechungsebenen eine andere Figur haben.

Die bisher entwickelte Theorie gibt auch für Körper, deren Durchſchnitte nicht rechtwinkelig ſind.

Um dieſes einzuſehen, nehme man an, daß auf den rechtwinkeligen Brechungsebenen ABCDE (Fig. 42.) die krummen Linien BQD; PRP′ ſo gezogen ſeyn, daß der Widerſtand der zwiſchen ihnen und den Seiten des Rectangels BCDE eingeſchloſſenen Räume BQDE und BQDC in einem unveränderlichem Verhältniſſe zu dem Widerſtande des Rectangels ſeyn. Legt man nun durch alle dieſe krummen Linien BQD; PRP′ eine Fläche; ſo iſt es klar, daß der anfängliche feſte Körper in zwey andere Körper BQDCA und BQDEA von derſelben Länge AB getheilt ſeyn wird, welche auf eine gleiche Weiſe widerſtehen werden, indem eine jede ihrer Brechungsebenen ein beſtimmter Theil der ihnen correſpondirenden rechtwinkeligen Brechungsebenen ſeyn wird. Nimmt man z. B. an, daß die krummen Linien BQD, PRP′ Parabel ſind, welche die Linien DC, MP′ zur Achſe, und die Punkte D, P′ zur Scheitel haben; ſo wird man finden, daß die beyden feſten Körper BQDEA und BQDCA in allen Punkten ihrer Länge gleichförmig widerſtehen, und daß der Widerſtand einer jeden dieſen Ebenen die Hälfte des Widerſtandes der ihnen correſpondirenden rechtwinkeligen Brechungsebenen ſeyn wird.

Dritter Abſchnitt.

# Erfahrungen über den Widerſtand und die Elaſticität des Eichen- und Fichten-Holzes.

## Allgemeine Betrachtungen. Von der Krümmung, welche perpendikulair auf ihre Länge beſchwerte feſte Körper bey dem erſten Grade ihrer Biegung annehmen.

§. 190.

Nothwendigkeit der Verſuche über den Widerſtand der feſten Körper.

Die Sätze, welche wir bisher bewieſen haben, können alsdann nur für die Anwendung nützlich werden, wenn man durch eine Reihe von Verſuchen den Widerſtand beſtimmt hat, welchen der hierzu gewählte Körper der Biegung oder auch dem Bruche leiſtet.

Die Gewalt, mit welcher Körper der Biegung widerſtehen, hängt von der ihnen eigenthümlichen Elaſticität (§ 76.) ab; diejenige Kraft aber, womit ſie dem Bruche widerſtehen, hängt von der Cohäſion r (§ 1) ihrer Fibern ab.

§. 191.

Da man bey den bisher angeſtellten Verſuchen ſich vorzüglich bemühte, das größte Gewicht zu beſtimmen, bey welchem ein feſter Körper von gegebenen Dimen-

ſionen zerbrach; ſo lernte man hierdurch die Kraft der Cohäſion r kennen; d. h. man brachte die größte Laſt in Erfahrung, welche eine parallel mit ihrer Länge gezogene Fiber erhalten kann.

## §. 192.

Wenn man aber bedenkt, daß bey den meiſten Bauwerken, und namentlich bey den Zimmerarbeiten, wo die feſten Körper dazu dienen ſollen, einer gewiſſen Gewalt zu widerſtehen, es gewöhnlich nöthig iſt, daß ſie gegen einander eine unveränderliche Lage beybehalten — daß aber bey einer zu großen Biegung dieſe Lagen ſich nothwendig verändern müſſen — wenn man dieſes bedenkt; ſo wird man leicht einſehen, daß es mehr darauf ankommt, das Verhältniß der größten Ordinaten dieſer Biegungen zu der Laſt, welche ſie erzeugt, zu beſtimmen, als die letzte Grenze davon zu kennen. Hiernach haben wir auf die Unterſuchung über die abſolute Elaſticität EKK unſer vorzüglichſtes Augenmerk gerichtet; und da Eichen und Fichten diejenigen Holzarten ſind, welche bey den verſchiedene Bauarten vorzüglich gebraucht werden: ſo haben wir, um dabey auf gewiſſe Reſultate zu kommen, die Verſuche über dieſe beyden Holzarten ſehr vervielfältigt. Der Gang, welchen wir genommen haben, iſt übrigens derſelbe, welchen man befolgen muß, wenn unſere Verſuche wiederholt, oder auch neue mit Subſtanzen angeſtellt werden ſollen, wozu wir, wegen Mangel an Zeit, nicht gelangen konnten.

Beſtimmung desjenigen, worauf man vorzüglich ſein Augenmerk richten muß.

## §. 193.

Wenn die § 76 für die Elaſticität gefundene Formel

$$dy = \frac{-P\left(\frac{x^2}{2} + cx + f\right)dx}{\sqrt{\left[E^2K^4 - P^2\left(\frac{x^2}{2} + cx + f\right)^2\right]}}$$

integrabel wäre; ſo würde man daraus den Werth EKK, als eine Funktion des Gewichtes P, finden, und die Coordinaten x und y durch die Beobachtung beſtimmen können. Da man aber bey dem jetzigen Zuſtande der Analyſis dieſen Werth nur durch eine unendliche Reihe erhalten kann; ſo muß man darauf Verzicht thun, von vorſtehender Gleichung Nutzen ziehen zu können.

Auf welche Weiſe man den genauen Werth der abſoluten Elaſticität würde erfahren können

## §. 194.

Hierzu dienende Bemerkung.

Glücklicher Weiſe iſt dieſer Mangel zu erſetzen. Man bedenke hierzu, daß irgend ein feſter Körper keine beſtimmte Krümmung angenommen haben kann, ohne zuvor durch alle Grade von Biegung gegangen zu ſeyn, welche zwiſchen ſeinem erſten Zuſtande und ſeinem jetzigen wirklichen Zuſtande der Krümmung inne liegen. Man ſieht nun leicht ein, daß bey dem erſten Grade der Biegung das Element der Krümmung dem Elemente ihrer Achſe ſehr nahe gleich ſeyn muß. Und weil die gewöhnlich bey den Bauwerken gebrauchten feſten Körper, und vorzüglich die Zimmerhölzer nur ſehr unvollkommen elaſtiſch ſind; ſo folgt daraus, daß es hinreichend iſt, bey der Unterſuchung über ihre abſolute Elaſticität, ſie bloß in dem Momente, wo die Biegung anfängt, zu betrachten.

## §. 195.

Der Ausdruck EKK kommt ſowohl der Steifheit, als der Elaſticität zu.

Es iſt noch zu bemerken, daß der Ausdruck EKK der Elaſticität ebenfalls der Steifheit der zu den Verſuchen beſtimmten Körper zukommt; denn der Widerſtand, welchen ſie der Biegung entgegen ſetzen, iſt einerley, der Körper mag, nachdem die Laſt zu wirken aufhört, ſeine erſte Figur wieder annehmen, oder nicht. Die Reſultate des Calculs, welche wir durch die Anwendung dieſer Ausdruckes erhalten werden, ſind alſo für beyde Zuſtände anwendbar; eine Bemerkung, welche weſentlich iſt, und nicht außer Acht gelaſſen werden darf.

## §. 196.

Gleichung für die Elaſticität, wenn die Krümmung ſehr klein iſt.

Der Körper A M H (Fig. 43.) ſey mit ſeinem Ende H befeſtiget, und in A ſey er mit einem Gewichte P belaſtet, wodurch er eine gewiſſe Krümmung angenommen habe. Macht man nun AP = x; PM = y; den Bogen AM = s; die abſolute Elaſticität oder Steifheit in M = EKK, und den Krümmungshalbmeſſer an dieſem Punkte = R; ſo hat man für die krumme Linie A M H folgende Gleichung

$$Px = \frac{EKK}{K} = -\frac{EKK\,dx\,ddy}{ds^3}.$$

Und wenn die Krümmung nur klein iſt, ſo daß man ds = dx ſetzen kann,

$$Px = -\frac{EKK\,ddy}{dx^2}$$

Integrirt gibt ſie

$$\frac{P}{2}(x^2 + A) = - \frac{EKKdy}{dx}$$

Die Conſtante A muß ſo ſeyn, daß die Tangente des Winkels, welchen die krumme Linie und ihre Achſe an dem Ende H bilden, einen beſtimmten Werth e habe. Man nehme alſo an, daß die Abſciſſe A B, welche nach dieſer Hypotheſe von der Länge des feſten Körpers unendlich wenig verſchieden iſt, = f ſey; ſo bekommt man

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{P}{2EKK}(ff + A) = e$$

und folglich

$$\frac{P}{2}\left(xx - ff - \frac{2EKKe}{P}\right) = - \frac{EKKdy}{dx}.$$

Wenn der feſte Körper vor ſeiner Biegung horizontal iſt; ſo iſt e = 0, und die Gleichung für die geſuchte Linie wird

$$\frac{P}{2}(xx - ff) = - \frac{EKKdy}{dx}$$

Wir begnügen uns, dieſen einzelnen Fall näher zu unterſuchen; denn da man die krumme Linie A M H auf eine jede in derſelben Ebene gezogene Achſe beziehen kann: ſo kann man auch annehmen, daß dieſe Achſe mit der Richtung, welche der Körper in ſeinem anfänglichen Zuſtande hat, parallel ſey.

Wird die vorſtehende Gleichung durch dx multiplicirt und alsdann integrirt, ſo wird ſie dieſe

$$\frac{P}{2}\left(ffx - \frac{x^3}{3}\right) = EKKy.$$

wozu keine Conſtante hinzuzufügen iſt, weil die Coordinaten zu gleicher Zeit verſchwinden. Da dieſe Gleichung einer Linie vom dritten Grade angehört; ſo iſt ſie leicht zu verzeichnen.

§. 197.

Wenn man den Werth der größten Ordinate HB der krummen Linie AMH haben will, ſo muß in vorſtehender Gleichung x = f geſetzt werden. Iſt alſo dieſe größte Ordinate = b; ſo haben wir

$$EKK = \frac{Pf^3}{3b}.$$

Dieſe Gleichung dient nun dazu, durch Beobachtungen ſowohl die abſolute Elaſticität als auch die Steifheit durch Verſuche zu beſtimmen.

§. 198.

Verhältniß der Laſten zu den größten Ordinaten der Krümmungen.

Wenn man annimmt, daß eine andere Laſt P′ eine andere größte Ordinate b′ der Krümmung hervorbringe; ſo haben wir noch

$$EKK = \frac{P' f^3}{3b'}.$$

Und da die Elaſticität, für ein und dieſelbe Brechungsebene, bey jeder Krümmung des feſten Körpers unveränderlich iſt; ſo erhält man dieſe Proportion P : b = P′ : b′. So lange alſo die größten Ordinaten den Laſten proportional ſind; ſo lange wird man auch durch dieſe Gleichung einerley Werth für EKK finden; die bisher entwickelte Theorie wird alſo beſtätigt, und man kann annehmen, daß das Element ds der Krümmung wirklich dem Elemente dx der Abſciſſe gleich ſey. Wenn aber die größte Ordinate der Krümmung in einem größern Verhältniſſe zunimmt, als die ſie erzeugende Laſt, und wenn in dem Ausdruck für EKK dieſe bey den neuen Elementen P″ und b″ genannt worden; ſo wird $\frac{P'' f^3}{3b''}$ kleiner als $\frac{P' f^3}{3b'}$ oder als $\frac{P f^3}{3b}$, und die Vorausſetzungen können alſo nicht mehr gelten, ſo bald die Krümmungen des feſten Körpers zu groß werden.

§. 199.

Werth von EKK wenn der feſte Körper an ſeinen Enden unterſtützt iſt.

Wenn der feſte Körper, anſtatt an einem ſeiner Enden befeſtigt zu ſeyn, durch eine Unterlage Z (Fig. 44.) unterſtützt, und mit den beyden Gewichten P und P′ belaſtet iſt, und wenn man alsdann AB = f; A′B′ = f′; Ap = x; A′p′ = x′;

$pm = y$ und $p'm' = y'$ ſetzt; ſo hat man für die Krümmungen der beyden Theile $Amz$ und $Am'z$ des feſten Körpers folgende zwey Gleichungen

$$1\text{ſtens} \;.\;.\;.\;.\; \frac{P}{6}(3f^2x - x^3) = EKKy.$$

$$2\text{tens} \;.\;.\;.\;.\; \frac{P'}{6}(3f'^2x' - x'^3) = EKKy'.$$

Und macht man $y = y' = b$; $x = f$ und $x' = f'$, ſo wird

$$b = \frac{Pf^3}{3EKK} = \frac{P'f'^3}{3EKK}.$$

Folglich

$$P = \frac{3EKKb}{f^3} \text{ und } P' = \frac{3EKKb}{f'^3}.$$

Es iſt alſo $P + P'$, oder der Druck auf den Unterſtützungspunkt $=$ $3EKKb\left(\frac{1}{f^3} + \frac{1}{f'^3}\right)$, und da dieſer Druck dem Gewichte gleich iſt, welches, wenn die beyden Enden des feſten Körpers feſt unterſtützt wären, in Z angebracht, eben dieſelbe Krümmung hervorbringen würde; ſo ergibt ſich hieraus, daß die in der Mitte der Länge anzubringende Laſt, um im Stande zu ſeyn, die größte Ordinate $b$ hervorzubringen, durch $\frac{6EKKb}{f^3}$ dargeſtellt werden kann.

## §. 200.

Die Elaſticität u. Steifheit der Körper iſt nicht gleichförmig in allen ihren Punkten.

Bisher haben wir angenommen, daß die Elaſticität und die Steifheit in der ganzen Ausdehnung des feſten Körpers gleichförmig ſey. Aber dieſe Vorausſetzung kann ſtrenge genommen nicht richtig ſeyn, weil wir keinen Körper kennen, deſſen Theile alle vollkommen homogen wären. Um alſo die Krümmung irgend eines Körpers genau zu berechnen, wäre erforderlich, das Geſetz zu wiſſen, wornach deſſen Elaſticität an den verſchiedenen Punkten ſeiner Länge ab- oder zunimmt; zu welcher Kenntniß wir ſchwerlich je gelangen werden. Gut geſchmiedete Metalle ſind vielleicht die homogenſten Körper, die uns zu Gebote ſtehen, indem hierzu menſchlicher

Fleiß ſehr nachhelfen kann. Mit dem Holze und den übrigen Produkten der Natur iſt es hierin ein anders. Eine Menge Beobachtungen haben gezeigt, daß das Kernholz der Bäume viel dichter iſt, und mehr widerſteht, als der Splint, und eben ſo iſt auch das Holz unten vom Stamme viel ſtärker, als das aus dem Gipfel. Durch eine Reihe von Verſuchen könnte man vielleicht dahin gelangen, das Verhältniß für dieſe verſchiedenen Widerſtände zu finden. Aber wie würde man die Verſchiedenheiten derſelben beſtimmen können, welche bloß durch zufällige Urſachen erzeugt wurden? Hierauf kann alſo bey den Biegungen nicht Rückſicht genommen werden. Man muß daher hier, wie in ſo vielen andern Fällen, mit Näherungen zufrieden ſeyn. Aus dem Memoire, welches Euler 1757 in die Schriften der Berliner Academie einrücken ließ, erſieht man, wie wenige Fälle ſich dahin reduciren laſſen, bey welchen die Gleichung für die elaſtiſchen Linien nur Differentiale vom erſten Grade enthalten, wenn die Elaſticität der Steifheit der Linie, deren Krümmung gefunden werden ſoll, eine Funktion ihrer Länge iſt. Und ſelbſt hierzu gelangt man nur mittelſt eines äußerſt weitläuftigen Calculs.

Die Theorie der elaſtiſchen Linien, deren Elaſticität variabel iſt, würde weit weniger Schwierigkeiten haben, wenn man, anſtatt in einem beſtimmten Zuſtande ihrer Krümmung, ſie in dem Zuſtande des Anfangs ihrer Krümmung betrachtete. Hierdurch würde der Ausdruck für den Krümmungshalbmeſſer viel einfacher werden, weil alsdann das Element der Krümmung dem Elemente der Abſciſſe noch gleich iſt.

## §. 201.

Wie man den Widerſtand beſtimmt wenn ſie eine gewiſſe Potenz der Länge des Körpers iſt.

Als ein Beyſpiel nehmen wir an, daß das Moment der Elaſticität irgend eine Potenz der Abſciſſe x ſey. Heißt dieſe Potenz $x^n$; die abſolute Elaſticität an dem Punkte, wo der Körper befeſtigt iſt, aber EKK; ſo haben wir für die Elaſticität an irgend einem Punkte $\frac{EKKx^n}{f^n}$, und die Gleichung für die geſuchte krumme Linie wird ſeyn

$$\frac{Pxf^n}{EKKx^n} = \frac{dyy}{dx^2}.$$

Integrirt gibt ſie

$$\frac{f^n P (x^{2-n} + A)}{(2-n) EKK} = -\frac{dy}{dx}$$

Die Conſtante A wird durch die Bedingung beſtimmt, daß für $x = f$ das $\frac{dy}{dx} = 0$ ſeyn muß. Man hat alſo $A = -f^{2-n}$, und folglich

$$\frac{f^n P (f^{2-n} - x^{2-n})}{(2-n) EKK} = \frac{dy}{dx}.$$

Dieſe Gleichung, wenn ſie zum zweyten mahl integrirt wird, gibt

$$\frac{f^n P \left(f^{2-n} x - \frac{x^{3-n}}{3-n}\right)}{(2-n) EKK} = y.$$

Zu welcher keine beſtändige Größe hinzuzufügen iſt, weil die Coordinaten zu gleicher Zeit verſchwinden müſſen.

§. 202.

Um eine Anwendung von dieſer Formel zu machen, nehmen wir an, daß die abſolute Elaſticität der Abſciſſe proportional, oder daß $n = 1$ ſey, und dann wird Der beſondere Fall, wenn der Exponent dieſer Potenz die Einheit iſt.

$$\frac{fP}{2EKK} (2fx - xx) = y.$$

Welche Gleichung einer Parabel angehört.

Nimmt man nun $x = f$, und die dieſer Abſciſſe angehörige Ordinate $= b'$, ſo iſt

$$EKK = \frac{Pf^3}{2b'}.$$

Wenn aber die Elaſticität unveränderlich iſt, ſo iſt (§ 197.)

$$EKK = \frac{Pf^3}{3b}.$$

Wenn alſo die Größen EKK, P und f dieſelben bleiben, ſo iſt $2b' = 3b$, und die größte Ordinate der Krümmung eines feſten Körpers von unveränderlicher Elaſticität iſt zwey Drittel von der größten Ordinate der Krümmung eines Körpers, deſſen Elaſticität nach der vorigen Hypotheſe veränderlich iſt.

Da die Beſtimmung der Größe EKK der vorzüglichſte Gegenſtand war, worauf wir unſer Augenmerk gerichtet hatten; ſo wäre es natürlich geweſen, mit den Verſuchen über den relativen Widerſtand den Anfang zu machen. Da wir aber die gleich zu beſchreibende Zurüſtung zu den Verſuchen über den abſolut negativen Widerſtand ſchon vorfanden; ſo haben wir auch dieſe zuerſt vorgenommen. In der Beſchreibung, welche wir von dieſen Verſuchen geben werden, wollen wir die Zeitordnung beobachten, nach welcher ſie angeſtellt wurden.

---

## Beſchreibung der Zurüſtung.

### §. 203.

Vorſichtsmaßregeln, um die Zurüſtung unbeweglich zu machen.

Die Zurüſtung, welcher wir uns bedient haben, um Verſuche über den Widerſtand des an feinen Enden belaſteten Holzes anzuſtellen, beſtand, vorzüglich aus zwey Stücken AB, AB (Fig. 45 und 46. Tab. IV.), die mit einer Länge von 4,546 Metre über der Erde vertikal errichtet waren. Die Länge dieſer im Viereck (d'equarriſſage) 0,2706$^m$ (Metre) ſtarken Hölzer in der Erde war, 3,5721$^m$. An ihren untern Enden waren ſie durch ein eingefugtes, horizontales Querholz mit einander verbunden.

In einer Entfernung von 0,4059$^m$ von dieſen beyden erſtern Hölzern waren zwey andere EF, EF gleichfalls vertikal errichtet, deren Stärke etwas geringer als die der erſtern Hölzer war. Dieſe beyden letztern Hölzer waren an ihrem Fuße, mittelſt zweyer horizontalen Balken, GH, GH, mit den beyden erſtern verbunden. In eben dieſe beyden Balken waren auch die vier Streben J. J. J. J, zur Unterſtützung der vier Seitenhölzer AB, EF eingefugt. Die beyden erſtern AB, AB wurden überdem noch durch das an ſeinen Enden auf der Erde ruhende Querholz KL

zuſammen gehalten. Dieſes Querholz war zur Hälfte in die vertikalen Hölzer A B, und mit einem Drittel ſeiner Dicke ungefähr in die Schwellen G H, G H eingefugt.

Dieſe Schwellen waren durch die horizontalen Hölzer M M, N N u. ſ. w. unterſtützt, welche ſelbſt wieder auf einer, in einem 1,2989 $^m$ tiefen Loche, horizontal gelegten Reihe kleiner Balken O O, u. ſ. w. wieder ruhten.

Auf dem Holze M M lagen eine oder mehrere Bohlen, ſo daß die oberſte mit dem Querholze K L in einem Horizont lag, um dem Holze Q Q zur Unterlage dienen zu können. Auf dieſem Holze lagen die Klötze R, R′, wovon der oberſte von Gußeiſen war.

Die Streben T T hinderten, daß die erſtern Seitenhölzer A B auch in der Richtung ihrer Ebene ſich nicht verrücken konnten.

Um dieſe Seitenhölzer vollends zu befeſtigen, war hinter einem jeden noch das Querband mit Bolzen befeſtiget.

In einer Entfernung von 3,3826 $^m$ über den Balken G H war in den vertikalen Hölzern A B ein eiſerner Bolzen V von 0,0813 $^m$ im Durchmeſſer. Dieſer Bolzen diente dem Hebelarm X Y zur Umdrehungsachſe, an dem Ende dieſes Hebelarmes hing vermittelſt des Hakens y die Wagſchale Z, worauf die Gewichte gethan wurden, welche auf das zu dem Verſuche beſtimmte Holz wirken ſollten.

Der Hebel X Y wurde durch die beyden auf eine Schwelle c d aufrechtſtehenden Hölzer a b, a b, in eine vertikale Ebene erhalten. Dieſe Hölzer a b a b ſtanden perpendikulär auf G H, und waren 4,7898 $_m$ von A B entfernt.

Jedes der drey Paar aufrechtſtehenden Hölzer A B, E F und a b waren oben durch Querhölzer, und dieſe Querhölzer waren wieder durch die beyden Bände e f, e f mit einander verbunden.

§. 204.

Oben auf dem Hebel, und zwar unmittelbar unter dem Bolzen V, waren vier, mit einem in der Mitte ihrer Länge, zur Aufnahme des Bolzens V, zirkelförmigen Ausſchnitt verſehene Eiſen angebracht. An dem untern Theile des Hebels

Mittel, welche angewandt wurden, die zu den Verſuchen dienenden Hölzer vertikal zu erhalten.

waren auf den, ganz in das Holz eingelaſſenen, eiſernen Stangen J K (Fig. 47. Tab. V.) zwey eiſerne Widerlagen g h, g h vermittelſt Ziehſchrauben befeſtigt. Wurden nun mit einem Stücke Holz Verſuche gemacht; ſo kam unter dieſen Widerlagen ein eiſernes Querſtück l m (Fig. 48. Tab. V.) zu liegen, durch welchem eine Achſe ging, woran die beyden Rollen n, n befeſtiget waren. Der Durchmeſſer dieſer Rollen war, 0,4059$^{m}$, ſie dienten dazu, das Verrücken des zum Verſuche beſtimmten Holzes zu verhindern, indem ſie ſich zwiſchen den aufgeſtellten Hölzern AB und EF vertikal bewegten.

Wann alſo nun durch die in Z (Fig. 45.) angebrachte Laſt, der Hebel X Y ſich um den Bolzen V drehete; ſo glitten die an demſelben befeſtigten eiſernen Widerlagen über das Querſtück weg. Das zwiſchen dieſem Querſtück und dem eiſernen Kloze R′ gebrachte, und zu dem Verſuche beſtimmte Holz o p (Fig. 49.) mußte hierdurch alſo mit ſeinen beyden Enden beſtändig in ein und derſelben Vertikale bleiben.

§. 205.

Wie die Neigung des Hebels gemeſſen wurde.

Oben auf dem Hebel hatte man einen Quadranten q r (Fig. 49. Tab. V.) ſo befeſtigt, daß deſſen Mittelpunkt in den Mittelpunkt der Drehung fiel; ferner war an einem der aufrecht ſtehenden Hölzer ein horizontaler Index t angebracht, welcher auf dem in Grade eingetheilten Quadranten die Neigung des Hebels bey den Verſuchen anzeigt.

§. 206.

Der Hebel konnte vermittelſt der an den Gerüſtpfählen A′ A′ angebrachten Takeln WW (Fig. 45.) nach Willkühr manövrirt werden. Die Seile lieſen um Erdwinden, welche zu dieſem Ende in einiger Entfernung von dem Gerüſte errichtet waren. Die Gerüſtpfähle hielten noch einen dritten Flaſchenzug B′ wodurch die Gewichte auf die Wagſchale Z angebracht wurden.

§. 207.

Veränderte Zurüſtung zu den Verſuchen über den relativen Widerſtand.

Die ganze bisherige Zurüſtung reducirt ſich auf einen Hebel der zweyten Art, dem man in V eine gänzlich unbewegliche Unterlage zu geben ſuchte. Zu den Verſuchen über den relativen Widerſtand durften mit dieſer Zurüſtung nur geringe Abänderungen vorgenommen werden.

In einer Entfernung von 0,5662 m von der Erde wurden die vier Hölzer C′D′ C′D′ u. ſ. w. horizontal und zugleich ſo angebracht, daß ſie ſich gegen die aufrechtſtehenden Hölzer AB, AB, EF, EF unter rechten Winkeln vereinigten. Unterſtützt waren ſie an verſchiedenen Punkten ihrer Länge durch die gleichfalls aufrechtſtehenden Hölzer E′, E′ u. ſ. w. Ferner waren in dieſen horizontal gelegten Hölzer Fugen gemacht, worin eiſerne Stäbe F′, F′ zu liegen kamen, welche dem zum Verſuche beſtimmten Stück Holz G′H′ zur Unterlage dienten. Die Wirkung der Laſt wurde dieſem Holze durch das von dem Hebel L′M′ gepreßte vertikale Holz J′E′ mitgetheilt. Die bey dieſen Verſuchen gebrauchten Hebel und Wagſchale waren nicht ſo ſchwer, wie bey den erſtern Verſuchen, weil für gleiche Körper der relative Widerſtand viel kleiner iſt, als der abſolute Widerſtand.

## §. 208.

Verzeichnung der von dem Holze bey den Verſuchen angenommenen krummen Linien.

Da es bey den Verſuchen weniger darauf ankam, die Laſten zu beſtimmen, bey welchen die Körper brachen, als vielmehr dieſe Laſten mit den hervorgebrachten Krümmungen zu vergleichen; ſo wurde auch bey jeder Beobachtung die Krümmung verzeichnet, welche ein mit einem beſtimmten Gewichte belaſtetes Holz annahm.

Um dieſe Verzeichnung mit aller möglichen Genauigkeit machen zu können klebte man in der Mitte einer jeden der beyden perpendikulären Seiten ein Streifen Papier, worauf eine mit den Kanten des Holzes parallele gerade Linie gezogen wurde. Da dieſe Linie die Achſe des Holzes darſtellte; ſo zeigte ſie auch ihre Krümmung an. An den beyden Enden dieſer Achſe befeſtigte man eine Leiſte von dünnem Holze, von deren gerade Lage man ſich vermittelſt eines Fadens zu verſichern ſuchte. Indem man nun mit einer Art von Anſchlag-Lineal über dieſe Leiſte wegfuhr; ſo zeigte dieſes, da es gehörig eingetheilt war, die jedem Punkte der Achſe zugehörige Ordinate an.

## Berechnung über die Gewalt, welcher die zu den Verſuchen gewählten Körper widerſtehen mußten.

§. 209.

Druck, auf die zur den Verſuchen gewählten Körper.

Die Entfernung der Achſe der beweglichen Rollen ſey von dem Punkte y, an welchem die Laſt angebracht iſt = a; von dem Mittelpunkte der Schwere des zur Rechten dieſer Achſe liegenden Theiles des Hebels = b; von der Umdrehungsachſe V = c; von dem Mittelpunkte der Schwere des zur Linken dieſer Achſe liegenden Theiles des Hebel = d. Ferner ſey das Gewicht der Wagſchale = Q; das Gewicht des Theiles des Hebels, welcher zur Rechten der Achſe der Rollen liegt = P; das Gewicht des zur Linken dieſer Achſe liegenden Theiles des Hebels = K; der Druck auf den zum Verſuche gewählten vertikalen Körper = Y: ſo haben wir für den Stand des Gleichgewichtes

$$aQ + Pb = cX + Kd.$$

Oder

$$X = \frac{aQ + Pb - Kd}{c}.$$

Wir haben ferner

$$\frac{aQ + Pb}{P + Q} + \frac{Kd + cX}{K + X} : Y = \frac{Kd + cX}{K + X} : P + Q.$$

Und hieraus

$$Y = K + X + P + Q.$$

Wird für X der oben gefundene Werth ſubſtituirt; ſo erhält man

$$Y = \frac{K(c - d) + P(c + b) + Q(c + a)}{c}.$$

wovon die Anwendung auf Zahlen leicht zu machen iſt.

§. 210.

Beſtimmung des Gewichtes, welches in die Wagſchale geſetzt, denſelben Druck hervorbringen würde

Eine angeſtellte Rechnung gibt das Reſultat, daß ehe noch ein Gewicht in die Wagſchale Z gethan wird, der zum Verſuche gewählte Körper, bloß durch das eigenthümliche Gewicht des Hebels mit ſeinem Beſchlage, der Rollen und des

Holzwerkes unter der Wagſchale, ſchon einen Druck von 17325,64 Kilogramm auszuhalten hat.

Wenn man annimmt, das Gewicht des Hebels X Y ſey an demſelben Punkte der Länge angebracht, wo die übrigen Gewichte, womit er beſchwert iſt, angehängt ſind; ſo findet man, daß dieſes Gewicht in dem Verhältniß von 1 zu 19,6412 verkleinert werden muß *).

Das Gewicht des ganzen Holzwerkes müßte alſo, wenn es an dem Ende des Hebels X Y angebracht wäre, ungefähr 881,63 Kilogramm ſeyn **).

---

*) Denkt man ſich den Hebel X Y (Fig. 45 und 46. Tab. IV.) als nicht ſchwer, und dafür in y mit einem Gewichte M belaſtet, ſo haben wir in den vorigen Zeichen $aM = cX$, und $X \frac{aM}{c}$, und für den Druck Y auf den zu den Verſuchen gewählten Körpern

$$M + \frac{aM}{c} = \frac{M(a+c)}{c}.$$

Bey unſerer Zurüſtung iſt $a + c = 20{,}4583^{d}$ (Decimètre), und $c = 1{,}0416^{d}$; folglich

$$Y = M \frac{(20{,}4583^{d})}{1{,}0416^{d}} = 19{,}6412\ M.$$

**) Wir wollen den, durch die verſchiedenen Theile des Holzwerkes, hervorgebrachten Druck auf den zum Verſuche gewählten Körper hier einzeln angeben:

| | |
|---|---|
| Der Hebel mit ſeinem Beſchlag bringt einen Druck hervor in Pfunden . | 20942,832. |
| Das eiſerne Querſtück mit den daran befeſtigten Rollen . . . | 171,000. |
| Der Quadrant mit ſeinem Beſchlage . . . . . . | 27,2005. |
| Der Haken für die Wagſchale, und die Wagſchale ſelbſt mit den Seilen, woran ſie hängt . . . . . . . . . | 4279,1524. |
| Geſammter Druck . . . | 35420,1849. |

Nach der in der vorigen Note angegebenen Formel findet man, daß dieſer Druck durch ein in der Wagſchale angebrachtes Gewicht von 1803 Pfund = 881,93 Kil hervorgebracht wird, wobey alsdann das geſammte Holzwerk als nicht ſchwer angeſehen wird.

§. 211.

Formel, welche den Druck auf das Holz gibt, wenn man dabey auf die Neigung des Hebels achtet.

Der durch das Gewicht Q in der Wagſchale hervorgebrachte Druck würde $= (881{,}83^{Kil.} + Q)\ 19{,}6412$ ſeyn, wenn man annehmen könnte, daß der Hebel horizontal bliebe; da er aber ſich zu neigen anfängt, ſo wie der zum Verſuch gewählte Körper ſich biegt: ſo muß die Wirkung der Laſt kleiner werden im Verhältniſſe des Halbmeſſers zum Coſinus des Winkels, welchen der Hebel mit dem Horizont macht. Setzt man dieſen Winkel = b, und den ſin. tot. = r; ſo ergibt ſich für den Druck Y′ folgende allgemeine Gleichung

$$Y' = (881{,}93^{Kil} + Q)\ (19{,}6412)\ \frac{\text{coſ. b.}}{r}$$

Mit Logarithmen gerechnet erhält man

$$\log. Y = \log. (881{,}93 + Q) + \log. 19{,}6412 + \text{leg. coſ. b} - \log. r.$$

Dieſer Formel haben wir uns bedient, den Tabelle I. Col. 8 angegebenen Druck zu berechnen.

§. 212.

Wie die Zurüſtung über den relativen Widerſtand abgeändert war.

Die Zurüſtung über den relativen Widerſtand brachte auf das zu dem Verſuche beſtimmte Holz einen Druck von $215{,}277^{Kil.} \times 11{,}01$ hervor.

Um alſo den Druck Y zu beſtimmen, welcher Statt hat, wenn ein Gewicht q hinzu gekommen iſt, dient folgende Formel

$$\log. Y = \log. (215{,}277 + q) + \log. 11{,}01 + \log. \text{coſ. b} - \log. r.$$

wornach wir die Reſultate in der fünften Colonne der zweyten Tafel berechnet haben.

---

## Ausführliche Darſtellung der Verſuche, welche mit Eichenholz angeſtellt wurden, das an ſeinen Enden belaſtet war.

§. 213.

Die erſten Stücke, welche zu den Verſuchen gewählt wurden, hatten ungleiche Seiten. Man glaubte, daß ſie ſich immer nach der ſchwächſten Seite biegen würden;

aber ſchon bey dem erſten Verſuche ſahe man, daß der Unterſchied ihrer Dimenſionen nicht groß genug war, als daß die Biegung immer nach der kleinſten Seite hätte erfolgen ſollen. Um allem Mißverſtand vorzubeugen, nennen wir die größte Dimenſion der Baſis die Breite, die kleinſte Dimenſion aber heißt die Dicke.

## Erſte Tabelle *).

### §. 214.

Die erſte Colonne enthält die Dimenſionen und das Gewicht des zu den Verſuchen gewählten Holzes. Einrichtung der erſten Tabelle.

Die zweyte und dritte Colonne enthält die Höhe von unten an gerechnet, woſelbſt die größte Krümmung nach den beyden Seiten Statt hatte. Und weil manchmahl zwey Biegungen bemerkt wurden, ſo hat man die Höhen der größten Ordinaten dieſer Krümmungen durch die Zeichen + und — unterſchieden.

Die 4te und 5te enthält die größten Ordinaten mit den Zeichen + oder — je nachdem ſie zur Rechten oder zur Linken der vertikalen Linie bemerkt wurde.

Wenn ein an ſeinen Enden belaſteter prismatiſcher Körper, deſſen Grundfläche rechtwinkelig iſt, ſich nach ſeinen beyden Seiten biegt; ſo theilt ſich das geſammte Gewicht den Dimenſionen der Grundfläche des Körpers proportional (§ 108), um die Krümmung nach einer jeden ſeiner Seiten hervorzubringen. Dieſem nach haben wir die Laſt den beyden Dimenſionen proportional eingetheilt, und dieſe Theile in der 7. und 8te Colonne verzeichnet.

Die 9te Colonne gibt endlich die Zeit an, welche von dem Anfange des Verſuches an bis zu dem Momente, da die Beobachtung gemacht wurde, verſtrich.

Wir wollen jetzt von einem jeden Stücke, das zu beſondern Beobachtungen Veranlaſſung gab, einzeln handeln.

*) Die Tabellen finden ſich am Ende des Buches.

## No. I.

### §. 215.

Dieſes Holz krümmte ſich nach beyden Dimenſionen.

Dieſes Holz krümmte ſich nach beyden Dimenſionen: dieß iſt die einzige Erſcheinung, welche dabey zu bemerken iſt. Wie es entlaſtet wurde, nahm es allmählig ſeine gerade Richtung wieder an. Den folgenden Tag war es ganz in ſeinen erſten Zuſtand wieder gekommen.

## No. II. (Tab. VIII. der Kupfer.) *).

### §. 216.

Wenn die Fibern ſchief ſind, welchen Einfluß dieß hat.

Das zweyte Stück bog ſich mehr nach ſeiner Breite, als nach ſeiner Dicke, welches der ſchiefen Lage der Fibern in der erſtern Dimenſion zugeſchrieben wurde.

### §. 217.

Vertikale Bewegung des Biegungspunktes.

Im Anfange des Verſuches war die Krümmung der auf die Ebene der Dicke des Holzes gezeichneten Linie ganz an einer Seite der vertikalen Linie; ſo wie aber die Laſt vergrößert wurde, ſo näherte ſich die krumme Linie dieſer vertikalen, und gieng endlich an die andere Seite derſelben. Als man dieß gewahr wurde, war der Biegungspunkt ſchon bis zu ungefähr einem Metre unter dem obern Ende des Holzes herunter gekommen. Bey vermehrtem Gewichte kam er immer tiefer, und endlich ſank er bis zu 0,33$^{m}$ über dem untern Ende des Körpers. Nun hörte man einen Knall, und gleich darauf zerbrach er (Fig. 52. Tab. VII.).

### §. 218.

Nothwendigkeit, verſchiedene Krümmungen des zum Verſuche gewählten Körpers zu verzeichnen.

Da dieſe Beobachtung uns gezeigt hat, daß die Configuration eines Körpers während des Verſuches mehrere Veränderungen erleiden kann, und daß die Ordinaten für einen und denſelben Punkt der Achſe poſitiv und negativ ſeyn können; ſo wurden wir dadurch veranlaßt, die Krümmungen dieſes feſten Körpers genau zu

---

*) Auf der 8. und 9. Kupfertafel ſind die verſchiedenen Configurationen der Hölzer noch ihrem Bruche abgebildet. Dieſe Figuren zeigen deutlich, wie die Stelle des Bruches durch die Lage der Aeſte und durch andere zufällige Umſtände beſtimmt wird.

verzeichnen, um ſo die Phänomene der Biegung und des Bruches, wenn derſelbe Statt hat, genauer bemerken zu können.

Wir hatten bisher geglaubt, uns damit begnügen zu können, bloß die größten Ordinaten der Krümmung nach den beyden Ebenen zu bemerken.

No. III.

§. 219.

Das Holz No. III. krümmte ſich bloß in der Ebene ſeiner Dicke. Die Ebene der Breite blieb während der 10 Stunden, die der Verſuch dauerte, vertikal. Neue Beobachtung zu der §. 217. erwähnten.

Die beobachtete Krümmung war anfänglich theils poſitiv, theils negativ. Während der erſten und zweyten Beobachtung war der Biegungspunkt ungefähr 0, 15 *m* gefallen; zwiſchen der 2ten und 3ten Beobachtung war er 0, 1082 *m* weiter hinunter gekommen; und bey der vierten Beobachtung war die Krümmung ganz negativ, oder ganz an der linken Seite der vertikalen Linie (Fig. 53.).

Wir hatten ſchon bey dem vorſtehenden Verſuch bemerkt, daß das hinzugefügte Gewicht den Biegungspunkt aus der Mitte des Holzes nach einem der Enden deſſelben zu verſetzen ſtrebte.

§. 220.

Da während der verſchiedenen Beobachtungen, wo die Zwiſchenzeit nur zwey Stunden dauerte, die Bewegung des Biegungspunktes ziemlich ſchnell war, und weil bey dem zweyten Verſuche nach dieſer Bewegung der Bruch erfolgte: ſo befürchtete man, daß, bey einer zu geſchwinden und zu ſtarken Vermehrung des Gewichtes, dieſes auch jetzt auf einmahl und zu geſchwind erfolgen möge, um die dabey Statt habenden Erſcheinungen gehörig beobachten zu können. Das zwiſchen der 4ten und 5ten Beobachtung hinzugefügte Gewicht wurde alſo vermindert; ſo wie es aber auf die Wagſchale gelegt war, hörte man das Holz berſten, welches man den Bruch einiger innern Fibern zuſchrieb, indem die äußern keine Veränderung erlitten zu haben ſchienen. Einen kleinen Knall, der einen baldigen Bruch zu drohen ſchien, hörte man nun noch von Zeit zu Zeit. Man eilte alſo Holzes zu verzeichnen, und alsdann das die angenommene Krümmung des Gewicht, welches auf dieſelbe wirkte, zu ver- Die innern Fibern brechen, ohne daß man an dem Umfange des Stückes einen Bruch bemerken kann.

mindern, und kaum war es von demſelben befreyet; ſo richtete es ſich beynahe ganz wieder gerade. Dieß beweiſet, daß ungeachtet des vernommenen Borſtes, die Elaſticität noch nicht ganz vernichtet ſeyn mußte.

§. 221.

Es ſtellte ſich nicht ganz wieder her.

Dieſes Holz wurde den folgenden Tag unterſucht. Die größte Ordinate ſeiner Krümmung hatte bey der fünften Beobachtung Statt, und war 0,0282 $^m$. Das Holz hatte ſich ſo weit wieder gerade gemacht, daß dieſe größte Ordinate 0,0045 $^m$ war. Dieſe Krümmung behielt es aber auch. Man hatte ſich alſo durch eine, hiernach noch dreymahl wiederholte Beobachtung überzeugt, daß der gehörte Knall bey einem Körper, welcher ſeine erſte Richtung nicht ganz wieder annimmt, den Bruch einiger Fibern andeutet, deren Widerſtand zu einer vollkommenen Reſtitution nothwendig iſt. Es iſt hierbey noch zu bemerken, daß das Holz, um zu dieſem Zuſtande wieder zu gelangen, auf keine Weiſe dieſelben Krümmungen wieder durchlaufen iſt, welche es, während ſeiner Biegung, nach einander annahm.

§. 222.

Die Reſtitution erfolgt nicht immer auf dieſelbe Art, wie die Biegung.

Dieß ergibt ſich hieraus: bey der erſten Beobachtung ſchnitt die Krümmung die vertikale Linie in einem gewiſſen Punkt, nach dem Verſuche aber war dieſe Krümmung ganz von der einen Seite dieſer geraden Linie, obgleich die Summe der größten Ordinaten bey der erſten Beobachtung der größten Ordinate der Einen Krümmung, welche der Körper behielt, gleich war. Dieſe Bemerkung hat uns um ſo wichtiger geſchienen, weil das Phänomen, worauf ſie gegründet iſt, vielleicht ein Merkmahl von dem innern Bruche des Stückes iſt.

No. IV.

§. 223.

Die beyden Krümmungen nach den beyden Ebenen der Beobachtung ſind unabhängig von einander.

Dieſes Holz nahm nach ſeinen beyden Seiten regelmäßige Krümmungen an, deren größten Ordinaten während des ganzes Verſuches in der Mitte der Länge des Holzes bleiben. Die größte Ordinate der Breite blieb bey der zweyten und dritten Beobachtung unverändert, während die größte Ordinate der Dicke, um 0,0317 $^m$ größer wurde.

Von der zweyten Beobachtung an bis zu Ende des Verſuches war die ganze Wirkung der Gewalt alſo dieſe, daß das Holz nach ſeiner kleinſten Dimenſion gebogen wurde. Drey Monate nach dem Verſuche war die größte Krümmung nach dieſer Richtung nur noch $0,0045^{m}$, und nach der andern Dimenſion war ſie Null.

### No. V. (Kupfertaf. VIII.)

### §. 224.

Die Stärke dieſes Holzes war ungefähr dieſelbe von No. IV. Es brach bey einer Laſt von $22931,1648^{Kil.}$ ohne daß man die größte Ordinate der Krümmung in dem Augenblick des Bruches beobachten konnte. Der Bruch erfolgte mit einem ſtarken Knall, und hatte 0,6 Stunden nach der Hinzufügung des ihn erzeugenden Gewichtes Statt.

Der wenigere Widerſtand, den dieſer Körper im Vergleich mit dem vorigen leiſtete, rührte daher, daß ſeine Fibern wegen eines Aſtes, der ſich ungefähr in der Mitte der Länge deſſelben befand, nicht gerade waren.

### No. VI. (Kupfert. VIII.)

### §. 225.

Das Gewicht der Zurüſtung konnte dieſes Holz nicht biegen. Es fing erſt bey einer Laſt von $22939^{Kil.}$ an ſich zu krümmen, wobey zu bemerken iſt, daß dieſe Krümmung nach der größten Dimenſion erfolgte. Nach ſeiner Dicke bog es ſich, wie die Laſt $28619^{Kil.}$ war.

Dieſes Holz bog ſich Anfangs nach ſeiner größten Dimenſion.

### §. 226.

Zwiſchen der 2ten und 3ten Beobachtung, als die Laſt $39630^{Kil.}$ war, wurde die größte Ordinate für die Krümmung in der Dicke größer, und für die Krümmung der Breite kleiner.

Abnahme der einen Krümmung während die andere größer wurde.

Wir haben ſchon Gelegenheit gehabt zu bemerken, daß die Krümmung nach der einen Seite manchmahl aufhören könne, zu wachſen, während die Krümmung nach der andern Seite noch größer wird. In dieſem Verſuche iſt aber die Erſcheinung noch viel ſonderbarer: während das Holz fortfährt, nach ſeiner Dicke ſich noch

immer mehr zu krümmen, nimmt die Krümmung nach der Breite nicht allein nicht mehr zu; ſondern durch ihre Abnahme ſucht das Holz ſich ſeiner anfänglichen Geradheit wieder zu nähern.

§. 227.

Bey der 4ten Beobachtung fand man, daß ein Aſt auf der größten Seite des Körpers ein Steigen der größten Ordinate der Krümmung von 0, 1624 verurſacht hatte.

§. 228.

Umſtände, welche bey dem Bruche Statt hatten.

Bey einer Laſt von 52270 *Kil.* brach dieſes Stück mit einem ſtarken Knall, welcher Bruch in der Nacht erfolgte. Den andern Morgen fand man, daß dieſe Fibern nicht gebrochen waren, weil ſie die ihnen möglich größte Ausdehnung erhalten hatten; ſondern ein Theil derſelben gegen die Achſe des Stückes hatte ſich von der Ebene, mit der es zuſammen hing, losgeriſſen. Die integrirenden Theile des Körpers widerſtanden der Wirkung, welche ſie zu zerbrechen trachtete, alſo nicht bloß vermöge ihrer Elaſticität, ſondern auch vermöge ihrer Cohäſion, womit ſie aneinander hingen.

§. 229.

Die Longitudinal-Adhäſion der Fibern iſt eine der Urſachen dieſer Erſcheinung.

Wir ziehen aus dieſem Verſuche noch eine wichtige Bemerkung. Wenn die Fibern nicht gerade ſind, ſo kann man aus den größten Ordinaten des Moment des Bruches nicht beurtheilen, denn das Hinzuthun eines unbedeutenden Gewichtes kann Urſache ſeyn, daß die Longitudinal-Cohäſion der Fibern überwunden wird, ohne daß dadurch die Krümmung beträchtlich zunimmt. Der Effect hiervon ſcheint das Dickerwerden des Holzes an irgend einem Punkte zu ſeyn, welche Zunahme, die für vollkommen homogene Körper in der Mitte der Länge Statt haben müßte, von der Lage der Aeſte abhängt, wovon ein Holz von einer gewiſſen Stärke ſelten frey iſt.

§. 220.

Schwierigkeiten, welche aus dem überſpähnigen Holze entſtehen.

Dieſes leitet auf die Vorſicht, welche bey überſpähnigem Holze nothwendig wird. Will man die Zufälle vermeiden, welche durch einen unvermutheten Bruch erzeugt werden könnten, ſo darf man ſie nur mit der größten Sorgfalt belaſten, weil

ihr Bruch nicht immer durch eine der Laſt proportionale Krümmung ſich anzeigt, und weil ſie ſchon im Moment des Brechens ſeyn können, wenn man ihnen nach dem äußern Anſcheine noch einen übrig großen Widerſtand zutrauen möchte.

### No. VII.

### §. 231.

Die größten Ordinaten der Krümmungen in den beyden Ebenen correſpondiren nicht mit ein und demſelben Punkte in der vertikalen Linie.

Dieſes Holz bog ſich erſt unter einer Laſt von $17317^{Kil.}$. Bey der 2ten Beobachtung hatte es ſich nach beyden Seiten gebogen; aber die größten Ordinaten der Krümmungen correſpondirten nicht mit ein und demſelben Punkte in der vertikalen Linie. Die größte Breiten Ordinate war $1,6237^{m}$, und die größte Dicken Ordinate war nur 0,9742 über dem untern Ende des Holzes (Fig. 54.).

### §. 232.

Bewegung dieſer größten Ordinaten gegen einander.

Bey vergrößertem Gewichte wurden dieſe größten Ordinaten größer, wobey aber die eine hinunter, und die andere hinaufſtieg, ſo daß ſie bey der 6ten Beobachtung einem und demſelben, $1,2989^{m}$ hohen Punkte correſpondirten.

### §. 233.

Das Holz reſtituirte ſich vollkommen.

Werden die größten Ordinaten dieſes und des vorigen Holzes, die beynahe einerley Dimenſionen hatten, mit einander verglichen; ſo ſieht man, daß die vorigen Ordinaten immer kleiner waren. Dieſes iſt den geraden Fibern des Holzes No. VII. zuzuſchreiben, worin kein Aſt war. Man hörte auch während dieſes ganzen Verſuches keinen Knall, und als dieſes Holz entlaſtet war, erhielt es ſeine anfängliche Figur vollkommen wieder. Wahrſcheinlich hätte es noch ſtärker gebogen werden können, ohne daß es gebrochen wäre.

### No. VIII. (Kupfertaf. VIII.).

### §. 234.

Dieſes Holz wird während ſeiner Biegung zuſammen gedrückt und ſpalt.

Dieſes Holz zerbrach nach der Dicke bey einer Laſt von $33120^{Kil.}$. Folgendes iſt hierbey zu bemerken:

Erſtens. Die äußern Fibern des Holzes waren die ausgedehnteſten und bildeten die convexe Krümmung des Holzes; ein Theil des holzartigen Kegels, wel-

cher das früher gewachſene, oder ältere Holz darſtellte, riß ſich von der convexen Ebene, mit welcher er adhärirte, mit einem Knalle loß, und der Körper zerbrach.

Zweytens. Während die Fibern zerriſſen, ſpaltete ſich das Holz nach der Richtung ſeiner Achſe. Es wurden alſo nicht bloß die Fibern zerbrochen, ſondern es wurde auch die Adhäſion an einigen Stellen überwunden. Der Druck auf die Fibern ſuchte hier alſo auf dieſelbe Art die Trennung hervorzubringen, als eine hinlängliche Laſt gewiſſe Steine zu ſpalten ſich bemüht.

Drittens. Die an der concaven Seite mit der größten Ordinate correſpondirenden Fibern wurden zuſammengedrückt. Sie wurden durch die mittlern Fiber aus ihrer anfänglichen Ebene hinausgetrieben, indem dieſe den Raum, welchen ſie durch ihre Zuſammendrückung in der Länge verlohren, ſeitwärts wieder einnahmen.

§. 235.

Obgleich dieſes Holz ſchon ſeit länger als 15 Monate gefällt war, ſo ſchwitzte es doch an den Stellen, wo die größte Zuſammenpreſſung war, ein gelbliches Waſſer aus, welches aber gleich wieder in das Holz hereintrat, ſobald die Zuſammenpreſſung aufhörte.

No. IX. (Kupfertaf. VIII.

§. 236.

Bewegung der größten Ordinaten.

Dieſes durch den Froſt nach ſeiner Länge aufgeriſſene Holz bog ſich anfänglich nach beyden Seiten gleich ſtark; aber die größten Ordinaten correſpondirten mit verſchiedenen Punkten in der vertikalen Linie. Zwiſchen der erſten und zweyten Beobachtung ſanken ſie beyde um 0,1624 *m*.

§. 237.

Von der 2ten Beobachtung an nahm die Krümmung nach der Dicke ab, während ſie nach der Breite zunahm. Nachdem das Holz nach dieſer Seite ſich ſehr gebogen hatte, brach es unter einem Gewichte von 28626 *Kil*.

§. 238.

Wir haben ſchon geſagt, daß die Wirkung einer parallel mit den Fibern drükkenden Laſt die Dimenſionen der Breite und Dicke zu vergrößern ſtrebt, indem es die Holzſchichten von einander trennt.

Vermöge der Zuſammenpreſſung wird dieſes Holz dicker.

Der Verſuch No. IX. gab uns Gelegenheit, dieſe Behauptung zu beweiſen. Wir fanden nähmlich, daß die Breite dieſes Holzes da wo es brach $0,1692^{m}$ war; vor dem Verſuche aber war ſie nur $0,1579^{m}$. Die Breite des nach der Länge des Holzes Statt habenden Ritzes nahm während des Verſuches merklich zu. Es rührte gewiß von der geringen Cohäſion der Fibern her, daß der Bruch ſo unverſehens und plötzlich erfolgte. Dieſen Erfolg hat man immer zu befürchten, wenn man vom Froſte zerriſſenes Holz wählt, um es parallel mit ſeiner Länge zu belaſten.

No. X.

§. 239.

Hier iſt nichts zu bemerken, als daß die beyden größten Ordinaten während des Verſuches ſich um $0,1624^{m}$ ſenkten. Nach der Breite wurde es vollkommen wieder gerade, nach der Dicke hat es aber eine Krümmung von $0,0011^{m}$ behalten.

Dieſes Holz nahm nach der einen Seite ſeine gerade Lage wieder an.

No. XI. (Kupfertaf. IX.)

§. 240.

Die größte Biegung war nach der größten Dimenſion. Dieß zeigt beſtändig einen Fehler in der Gleichartigkeit der integrirenden Theile an.

§. 241.

Bey den beyden erſten Beobachtungen war die Krümmung nach der Dicke zur Linken der vertikalen Linie; bey der 3ten Beobachtung war ſie zur Rechten derſelben.

Fehler in der Organiſation, welche eine Zerquetſchung des Holzes veranlaßte.

Dieſer Erfolg würde unerklärlich geweſen ſeyn, wenn man nicht bemerkt hätte, daß das Holz, welches in der Höhe von ungefähr $0,1624^{m}$ faul war, zerquetſcht wurde. Da die Fibern in dem untern Theile einen zu geringen Widerſtand leiſteten, um gebogen werden zu können, ſo nahm der Körper die Krümmung AM′B

(Tab. IX. No. IX.) an, woraus die Erſcheinung, welche uns anfänglich auffiel, leicht zu erklären ſeyn wird. Dieſes Holz erhielt ſeine anfängliche Figur nie wieder.

## No. XII.

### §. 242.

Erſcheinung welche derjenigen ähnlich iſt, die wir bey No III. beobachteten.

Auch dieſes Holz krümmte ſich mehr nach der ſtärkern, als nach der ſchwächern Seite. Die größte Ordinate für die Breitenkrümmung blieb beſtändig in der Mitte des Holzes; bey der fünften Beobachtung bemerkte man aber, daß, welche bis dahin immer an der einen Seite der vertikalen Linie geblieben war, jetzt zum Theil poſitiv und negativ war, welche Erſcheinung mit derjenigen, welche wie bey No. III. bemerkten analog iſt.

## No. XIII.

### §. 243.

Oscillation der größten Ordinate.

Die größten Ordinaten der Krümmungen für die beyden Seiten hatten Anfangs in einer Höhe von 0,6495 *m* Statt. Bey der dritten und vierten Beobachtung war dieſe Höhe 0,8118 *o*; alsdann fielen ſie wieder bis auf die Höhe von 0,6495 *m*, wo ſie nun bis zu Ende des ganzen Verſuches blieben (Fig. 55.)

### §. 244.

Die Krümmung in der Ebene der Dicke war Anfangs ganz an einer Seite der vertikalen Linie; nach der zweyten Beobachtung aber war ſie theils poſitiv und theils negativ.

### §. 245.

Wie die größte Ordinate unverändert bleiben, und die Krümmung doch zunehmen kann.

Das einzige Bemerkenswerthe bey dieſem Verſuche iſt die Art von oscillirender Bewegung der größten Ordinaten. Würde ſich dieß nicht auf folgende Weiſe erklären laſſen?

Wir nehmen an, daß ein mit dem Gewichte Q beladener Körper AB (Fig. 56.) die Krümmung A M B habe, und daß MP die größte Ordinate ſey. Nimmt man nun ferner an, daß in M ein Hinderniß ſey, welches ſich der Bewegung des Punktes M nach H widerſetzt; ſo iſt es klar, daß der Körper bey einer vergrößerten

laſt eine Krümmung A m n annehmen wird, die mit der erſtern nur den Punkt M gemeinſchaftlich hat, indem die übrigen Punkte alle weiter von der Achſe entfernt liegen werden, als in der erſtern. Nach dieſer Hypotheſe iſt alſo die größte Ordinate P M kein Maß für die Krümmung, ſondern die größten Ordinaten, welche über oder unter dem Punkt M liegen, geben dieſes Maß. Nun ſieht man aber leicht ein, daß irgend ein zufälliger Umſtand in der Organiſation einen gleichen Effect, wie das Hinderniß M H hervorbringen kann. Die größten Ordinaten zwiſchen dem Punkte M und den Enden dieſes Holzes werden alſo größer oder kleiner werden, ſo daß die größte Krümmung in jedem von der Mitte der Länge verſchiedenen Punkte Statt haben kann.

§. 246.

Die Temperatur der Atmosphäre während eines Verſuches muß als eine Haupturſache zu den verſchiedenen Irregularitäten, welche in den Beobachtungen vorkommen, angeſehen werden. Denn die Biegſamkeit eines Körpers ſetzt voraus, daß die integrirenden Theile deſſelben ſich verrücken müſſen. Dieſe Verrückung könnte aber nicht Statt haben, wenn zwiſchen dieſen integrirenden Theilen ſich nicht kleine Zwiſchenräume befänden, welche die in Bewegung geſetzten Theile alsdann einnehmen; die Wirkung aber des Froſtes oder der Hitze auf die Körper beſteht nun darin, daß die Poren entweder zuſammengezogen oder auch ausgedehnt werden, wodurch alſo die Biegſamkeit nothwendig vermindert oder vermehrt werden muß. Einfluß der Temperatur der Atmosphäre auf die Biegung.

Das Holz No. XIII. hatte nach drey Monaten ſeine erſte Figur völlig wieder bekommen.

No. XIV. (Kupfert. IX.)

§. 247.

Die Fehler in der Gleichförmigkeit der Fibern dieſes Holzes verurſachte auch hier, wie bey dem vorſtehenden Verſuch eine vertikale Oscillation der größten Ordinate, und eben daher kommt auch der geringe Widerſtand deſſelben. Es brach unter einer Laſt von 32996 *Kil.*; da das Stück No. XIII., welches gleiche Dimenſionen hatte, ein Gewicht von 39446 *Kil.* trug, ohne zu zerbrechen. Oscillirende Bewegung der größten Ordinate.

## No. XV.

§. 248.

Zuſammenpreſſung dieſes Holzes nach ſeiner Länge.

Außer der oscillirenden Bewegung der größten Ordinate, hatten wir Gelegenheit eine neue Erſcheinung zu bemerken. Man wurde gewahr, daß zwiſchen der erſten und der zweyten Beobachtung die größte Ordinate nach der Dicke kleiner geworden war, ungeachtet das Gewicht vergrößert war.

§. 249.

Als man das Holz genauer unterſuchte, um die Urſache davon zu entdecken; ſo fand man, daß die Fibern des Holzes gerade waren, und daß ſie in einer Entfernung von 0,05141 von dem obern Ende zuſammen gedrückt, und gleichſam in einander gepreßt wären. Dieß hatte anſtatt einer größern Krümmung, eine Verkürzung des Holzes hervorgebracht. Man ſieht auch leicht ein, daß bey einem an ſeinem Ende beſchwerten Holze, welches eine gewiſſe Krümmung angenommen hat, die Wirkung des Gewichtes auf daſſelbe in zwey andere zerlegt werden muß, wovon die eine, perpendikulär auf die Krümmung an irgend einem Punkte, dieſe Krümmung zu vermehren ſtrebt, während die andere dahin trachtet, die Fibern des Holzes zuſammen zu preſſen. Wenn nun in dieſem Zuſtande die Fibern der Zuſammenpreſſung nach ihrer Länge mit weniger Kraft, als der größern Biegung widerſtehen; ſo iſt es klar, daß alsdann die beobachtete Erſcheinung Statt haben muß. Dieſes Holz hat indeß, ungeachtet der außerordentlichen Zuſammenpreſſung ſeiner Fibern, doch ſeine erſte Figur wieder angenommen.

## No. XVI. (Kupfert. IX.)

§. 250.

Die Krümmung bekommt einen Biegungspunkt.

Die Krümmung dieſes Holzes in der Ebene der Breite blieb während des ganzen Verſuches an einer Seite der vertikalen Linie. Die Krümmung aber in der Ebene der Dicke war anfänglich poſitiv; zwiſchen der 3ten und 4ten Beobachtung wurde die größte Ordinate derſelben kleiner, und bey der ſechsten hatte dieſe Krümmung in der Höhe von $0,487^m$ einen Biegungspunkt.

§. 251.

Die krumme Fläche iſt den größten Ordinaten proportional.

Die Summe der Ordinaten für die Ebene der Breite, wie ſie nach einander Statt hatten, waren den jedesmahligen größten Ordinaten proportional. Dieß iſt,

um es im Vorbeygehen zu ſagen, eine Eigenſchaft der elaſtiſchen krummen Linien, welche die an ihren Enden beladenen feſten Körper bey ihren Biegungen nachkommen, weil dieſe krummen Linien verlängerte Cycloiden ſind.

Der Bruch dieſes Holzes hatte bey einer Laſt von 37274 *Kil.* Statt.

### No. XVII.

### §. 252.

Doppelte Biegung; Oscillation der größten Ordinate.

Die Krümmung des Holzes No. XVII. in der Ebene der Dicke war bey der erſten Beobachtung ganz poſitiv. Der Ort der größten Ordinate, oder der Mittelpunkt der Biegung war 0,6495 $^m$ hoch. Als die Laſt größer wurde, ſo bemerkte man, daß die Krümmung immer mehr und mehr abnahm, und faſt mit der vertikalen Linie zuſammen fiel. Bey der zweyten Beobachtung fiel ſie wirklich auf dieſe gerade Linie, und endlich wurde ſie negativ. Der Mittelpunkt der Biegung hatte eine oscillirende Bewegung, wie man aus den vier letzten Beobachtungen ſah.

### §. 253.

Unterſchied zwiſchen der Stärke dieſes Holzes und des Holzes No. VIII. von gleichen Dimenſionen.

Während daß dieſes Holz ſich nach der Dicke bog, nahm auch die Breitenkrümmung, obgleich etwas weniger ſchnell, zu. Der Mittelpunkt der Biegung oscillirte. Die Summe der Ordinaten fand man bey jeder Beobachtung ſehr nahe der größten Ordinate proportional. Es trug 39630 *Kil.*, und einen Monat nach dem Verſuche war es wieder in ſeinen erſten Zuſtand gekommen; dahingegen das Holz No. VIII. von gleichen Dimenſionen ſchon bey einer Laſt von 33120 *Kil.* brach. Man ſieht hieraus, wie wenig man bey gleich langem und gleich ſtarkem Holze auf einen gleichen Widerſtand rechnen kann.

### No. XVIII. (Kupfertaf. IX.)

### §. 254.

Anfang und Zunahme einer doppelten Krümmung.

Die Krümmung der Dicke war anfänglich ganz an einer Seite der vertikalen Linie; zwiſchen der zweyten und dritten Beobachtung zeigte ſich eine doppelte Krümmung. Der gemeinſchaftliche Punkt dieſer beyden Theile war ſchon 0,6495 $^m$ von dem obern Ende. Zu gleicher Zeit wurde bemerkt, daß der Mittelpunkt für die

poſitive Krümmung ſich ſenkte, und daß die dieſer Krümmung correſpondirende größte Ordinate kleiner wurde (Fig. 57.)

Die bey den vorigen Verſuchen gemachten Beobachtungen ließen uns leicht vorausſehen, was ſich hier in der Folge ergeben mußte. Wenn ein Holz anfänglich eine poſitive Krümmung gehabt hat, und nun eine negative annimmt; ſo wird jene immer kleiner, und dieſe immer größer, bis endlich der Bruch erfolgt (Fig 53.).

## §. 255.

Bey der 4ten und 5ten Beobachtung bemerkte man auch wirklich, daß der Biegungspunkt weiter hinunter gekommen war, während die größte Ordinate des negativen Theiles größer, und die des poſitiven Theiles kleiner geworden war. Bey der 6ten Beobachtung war die Krümmung ganz negativ, der Mittelpunkt der Krümmung war 1,6237$^{m}$ von dem untern Ende des Holzes, und auf eine Höhe von 0,6495$^{m}$ ſchien die Krümmung in die Achſe zu fallen, ſo daß dieſe Achſe, wie bey der erſten Beobachtung, ihre Tangente wurde, nur mit dem Unterſchiede, daß die Brechungspunkte an den beyden entgegengeſetzten Enden waren.

## §. 256.

Zufall, welcher den Bruch des Stückes veranlaßte.

Es iſt wahrſcheinlich, daß der Berührungspunkt bey einer vergrößerten Laſt bald mit dem äußerſten Ende der vertikalen Linie zuſammen gefallen ſeyn würde. Da aber das Holz eine Menge Aeſte hatte, die daſſelbe nach verſchiedenen Richtungen durchſchnitten, und da es intereſſant war, die fernere Wirkung der Laſt kennen zu lernen; ſo fügte man zu der jetzigen Laſt von 37305 *Kil.* keine neue mehr hinzu. Nach 24 Stunden war dieſes Holz an einem Punkt ſeiner Länge zerbrochen, wo zwey Aeſte auf einer Querlinie ſich befanden.

## §. 257.

Die Breitenkrümmung variirte viel weniger, als die eben beſchriebene Krümmung der Dicke. Der Mittelpunkt der Krümmung blieb während des ganzen Verſuches unverändert. Man bemerkte bloß, daß ſie, wie der Körper bald brechen wollte, etwas geringer wurde.

No. XIX.

§. 258.

Als das Holz No. I. wieder in ſeinen anfänglichen Zuſtand gekommen war; ſo nahm man es zu einem zweyten Verſuche. Die Reſultate ſind in der Tabelle bey No. X X. aufgezeichnet. Die größte Ordinate für die Krümmung der Dicke geht hinunter.

Die Beobachtungen bey dieſem Stücke wurden nach gleichen Zeiträumen gemacht. Die drey erſten zeigten keine Krümmung nach der Dicke an. Dieſe wurde erſt zwiſchen der dritten und vierten bemerkbar. Bey den folgenden wurde ſie gleichförmig größer, wobey bloß zu bemerken iſt, daß gegen das Ende des Verſuches die größte Ordinate um 0,1624$m$ weiter herunter kam.

§. 259.

Die Krümmung nach der Breite hatte gleich nach der erſten Beobachtung Statt, welches man nur einer gewiſſen Verſchwächung der Fibern zuſchreiben kann; hernach aber nahm dieſe Biegung nicht ſo ſchnell zu, wie die nach der Dicke; ja zwiſchen der 3ten und 4ten, 5ten und 6ten, 7ten und 8ten variirte ſie gar nicht. Die größte Ordinate für die Breiten-Krümmung blieb unverändert.

§. 260.

Die größte Ordinate war Anfangs in einer Höhe von 1,6237$^m$; fiel aber hernach hinunter bis auf die Höhe von 1,4613 $^m$. Dieſe Veränderung der größten Ordinaten war in beyden Ebenen vollkommen einerley. Das Holz ſpaltet nach der Länge.

Während des ganzen Verſuches hörte man keinen Knall; man bemerkte bloß, daß das Holz geſpalten war, welches aber vielleicht weniger von der Laſt als von der Temperatur herrührte.

No. XX.

§. 261.

Die größte Ordinate für die Krümmung der Dicke bey dem Holze No. XX. blieb von der dritten bis zur zehnten Beobachtung 0,0045$^m$, obgleich das Gewicht mittlerweile um 34503$^{Kil.}$ vermehrt worden, und die größte Ordinate beſtändig in Biegungspunkt, beobachtet am Ende des Verſuches.

der Mitte der Länge war. Bey der 11. und letzten Beobachtung hatte die Krümmung einen Biegungspunkt 0,6495 *m* von dem obern Ende.

§. 262.

Die Breitenkrümmung wurde erſt bey der achten Beobachtung bemerkbar. Von nun an aber wurden die größten Ordinaten dieſer Krümmung durch die hinzugefügten Gewichte ziemlich ſchnell größer.

Das größte Gewicht, welches dieſer Körper getragen hat, war 621513 *Kil.*, und gleich nachdem er entlaſtet war, richtete er ſich wieder gerade.

No. XXI.

§. 263.

Einfluß der längeren Dauer der Belaſtung auf die Biegung.

Dieſes Holz fing an, ſich bloß nach der Dicke zu krümmen. Bis zu der 4ten Beobachtung blieb die größte Ordinate bey gleicher Laſt, wie in dem vorigen Verſuche, nur mit dem Unterſchiede, daß während die größte Ordinate immer niedriger wurde, der obere Theil der Krümmung auf die andere Seite der vertikalen Linie ging. Die größte Ordinate dieſes obern Theiles wurde größer, während die des untern Theiles kleiner wurde. Nachdem endlich das Holz 9 Tage lang mit 62468 *Kil.* beſchwert war, fand man, daß die Krümmung ganz in der andern Seite der vertikalen Linie, und alſo negativ geworden war, wenn ſie Anfangs poſitiv war.

§. 264.

Es iſt hierbey zu bemerken, daß die Breitenkrümmung nur dann bemerkbar wurde, als ſich der Biegungspunkt der erſtern Krümmung zeigte. Obgleich dieſe Breitenkrümmung in der Folge ſehr regelmäßig zunahm; ſo oscillirte die größte Ordinate doch zwiſchen der 7ten und 9ten Beobachtung; alsdann aber blieb ſie bis zu Ende des Verſuches auf der Höhe von 1,6237 *m*.

§. 265.

Verkürzung und Zuſammenpreſſung der Fibern unter der Laſt.

Ferner wurde man von der Zuſammenpreſſung des Holzes gewiß, welche es durch die Verkürzung der Fibern erlitt; auch bemerkte man Riſſe nach der Länge des Holzes.

Endlich bemerken wir noch, daß das Holz, welches zu den bisherigen Verſuchen genommen wurde, beſägt war, welches nothwendig weniger Widerſtand leiſten kann, als das bloß behauene Holz, wie es gewöhnlich zu den großen Bauwerken genommen wird.

Den abſoluten Widerſtand dieſer Hölzer werden wir aus den zur Beſtimmung des relativen Widerſtandes angeſtellten Verſuchen ableiten. Die Reſultate dieſer Verſuche ſind in der dritten Tabelle enthalten.

---

## Ausführliche Beſchreibung der angeſtellten Verſuche, um den relativen Widerſtand und die abſolute Elaſticität zu beſtimmen.

### §. 266.

Die Reſultate der über den relativen Widerſtand des Holzes angeſtellten Verſuche ſind in verſchiedenen Tabellen in acht Colonnen enthalten. Einrichtung der 2ten und 3ten, und 4ten Tabelle.

Die erſte Colonne gibt die Dimenſionen und das Gewicht der zu den Verſuchen gewählten Hölzer.

Wenn dieſes Holz unter die Zurüſtung gebracht war, deren Beſchreibung und Gewicht wir § 212 gegeben haben, ſo wurde die Laſt allmählig vermehrt, und die größten Ordinaten, welche in der zweyten Colonne angegeben ſind, ſorgfältig verzeichnet.

Die dritte Colonne gibt die Laſt an, wodurch die Krümmungen erzeugt wurden.

Durch das Hinzuthun eines neuen Gewichtes wurde die Krümmung ſogleich vergrößert, und wenn die Körper vollkommen elaſtiſch geweſen wären, ſo würden in den erſten Graden der Krümmung die größten Ordinaten der jedesmahligen Laſten

proportional geweſen ſeyn. Da nun aber die zu den Verſuchen genommenen Körper nicht vollkommen elaſtiſch waren, ſo mußte der Ausdruck für die abſolute Elaſticität der Steifheit für verſchiedene Laſten und größten Ordinaten geſucht, und hieraus das Mittel genommen werden, wodurch ſich alsdann die Elaſticität oder Steifheit des zu dem Verſuche gewählten Körpers mit einer hinlänglichen Genauigkeit ergab.

Die vierte Colonne enthält die für den erſten Augenblick, wo die Laſt zu wirken anfing, berechnete abſolute Elaſticität.

Die ſtetige Wirkung ein und derſelben Laſt vergrößert die größte Ordinate der Krümmung. Dieß könnte nicht Statt haben, wenn die Elaſticität ſich nicht veränderte, und in jedem Augenblicke einen Theil ihrer Energie verlöhre. Um dieſen verlohrnen Theil zu beſtimmen, ließ man die Körper eine gewiſſe Zeit mit ein und demſelben Gewichte belaſtet; alsdann verzeichnete man die größte Ordinate dieſer neuen Krümmung, woraus ſich ein neuer Ausdruck für die abſolute Elaſticität ergab, der in der fünften Colonne enthalten iſt.

Hat man die abſolute Elaſticität beſtimmt; ſo weiß man, daß das Gewicht leicht zu berechnen iſt, bey welchem der Körper, wenn er damit an ſeinem Ende beſchwert wäre, ſich zu biegen anfangen würde. Dieſes Gewicht, ſowohl für den erſten Augenblick der Belaſtung, als auch, nachdem dieſe Belaſtung ſchon eine Zeitlang gedauert hat, berechnet, enthält die ſechste und ſiebente Colonne.

Die achte Colonne zeigt endlich die Zeit an, welche zwiſchen den verſchiedenen Beobachtungen verſtrich.

## Zweyte Tabelle.

### §. 267.

Verſuche über den relativen Widerſtand ſolcher Stücke, deren Widerſtand parallel mit ihren Fibern man ſchon unterſucht hatte.

Da bey den vorigen Verſuchen über den abſoluten Widerſtand nicht alle Hölzer gebrochen waren, und mehrere ſelbſt ihre anfängliche Richtung wieder angenommen hatten; ſo wurden dieſe zu neuen Verſuchen gewählt, um ihre ſpecifiſche Elaſticität zu beſtimmen, und um ihren, aus dieſer Beſtimmung berechneten, abſolut negativen Widerſtand mit demjenigen zu vergleichen, welchen wir durch die erſtern Verſuche unmittelbar erhalten haben.

Die zweyte Tabelle enthält dieſe neuen Verſuche, die wir jetzt nach einander einzeln unterſuchen wollen.

## No. I.

### §. 268.

Man ſieht, daß der Ausdruck für die abſolute Elaſticität bey den vier Beobachtungen dieſes Verſuches faſt unverändert iſt, welches zur Beſtätigung der im Anfange dieſes Abſchnittes entwickelten Theorie dient.

Unveränderlicher Ausdruck der abſoluten Elaſticität.

Die Kleinheit der größten Ordinaten, die man deshalb nicht mit völliger Genauigkeit beſtimmen konnte, iſt vielleicht eine der erſten Urſachen zu den kleinen Differenzen, welche in dem Werth von EKK Statt haben.

Das mittlere Gewicht, mit welchem, an ſeinem Ende belaſtet, dieſes Holz würde angefangen haben ſich zu biegen, war auf 13400 *Kil.* berechnet. Unter der Laſt von 16374 *Kil.* bog es ſich, nach dem erſten Verſuch der erſten Tabelle, um 0,0068 *m*. Die Theorie wird alſo durch dieſe beyden Beobachtungen beſtätigt.

## No. II.

### §. 269.

Der zweyte Verſuch wurde mit demſelben Holze gemacht, deſſen Länge jedoch zwiſchen ſeinen Unterſtützungspunkten um 0,3247 *m* verkleinert war.

Dieſe Elaſticität iſt eine Funktion der Länge des zu dem Verſuche gewählten Körpers.

Die abſolute Elaſticität, welche bey jeder Beobachtung beynahe unverändert blieb, war geringer, als bey dem erſten Verſuche. Man ſieht alſo, daß dieſe Eigenſchaft, nach irgend einer Funktion von der Länge des Körpers, kleiner werden muß.

## No. III.

### §. 270.

Bey den drey erſten Beobachtungen war der Ausdruck für die Elaſticität wenig veränderlich. Da aber die vierte Beobachtung einen etwas kleinern Werth gab; ſo zeigt dieſes an, daß die Krümmung des Holzes ſchon zu groß war, als daß man die Elemente der Abſciſſe und des Bogens noch hätte für gleich annehmen können,

Der Ausdruck für die Elaſticität wird kleiner, wenn die Krümmung größer wird.

und daß man, um nach dieſer Beobachtung zu einem genauern Ausdruck für E K K zu gelangen, einige Glieder der Reihe § 193. berechnen müßte.

No. IV. und V.

§. 271.

Dieſe beyden Verſuche wurden mit einerley Holz gemacht.

Bey dem erſten Verſuche wurde die Elaſticität immer kleiner und kleiner; und bey dem zweyten nahm ſie im Gegentheil immer zu.

Ein Geſetz der Variation, das bey zwey mit ein und demſelben Körper nach einander angeſtellten Verſuchen einander ganz entgegengeſetzt erfolgt, beweiſet, daß fremde, außer dem Organismus liegende Urſachen, Einfluß auf den Widerſtand haben können. Obgleich es ſchwer ſeyn möchte, dieſe genau anzugeben; ſo glauben wir doch, daß die Beſchaffenheit der Atmosphäre während den Beobachtungen eine der hauptſächlichſten iſt. Man weiß ja, welchen Einfluß die Feuchtheit und Trockenheit, die Wärme und Kälte auf die Biegſamkeit der vegetabiliſchen Fibern haben, woraus die gewöhnlichen Seile beſtehen. Man weiß ja ferner, daß das Holz ſich zu manchen Zeiten ſpaltet und Riſſe bekommt, welche Riſſe zu andern Zeiten ſich wieder ſchließen. Man weiß endlich, daß alle Körper nach der Temperatur des Mittels, worin ſie ſich befinden, ſich zuſammenziehen und ausdehnen — alles dieſes ſind Erſcheinungen, die nicht Statt haben könnten, wenn ihre Steifheit oder ihre Elaſticität nicht irgend eine Veränderung erlitten hätten. Um alſo Verſuche dieſer Art mit aller Genauigkeit zu machen, wäre es nöthig, während der Dauer derſelben die hygrometriſche Beſchaffenheit der Atmosphäre und ihre Temperatur für jeden Augenblick mit in Rechnung zu bringen, welches aber nicht wohl thunlich ſeyn möchte.

No. VI.

§. 272.

Daſſelbe Holz wurde nochmahl zu dem Verſuche gewählt, und bloß auf eine andere Kante gelegt. Man ſieht daraus, daß der mittlere Werth von E K K in einem gewiſſen Verhältniſſe zu dieſen Dimenſionen ſteht.

## No. VII. und VIII.

### §. 273.

Dieſe beyden Verſuche gaben nichts beſonderes. Man bemerkte indeß, daß bey beyden die abſolute Elaſticität von der zweyten bis zur letzten Beobachtung ſich verminderte. Man kann dieſes leicht erklären, wenn man bedenkt, daß die Formel, welcher wir uns zur Berechnung der Elaſticität bedienten, für größere Krümmungen kleinere Werthe geben muß, weil die Summe der außer Acht gelaſſenen Glieder der Reihe größer werden.

Aehnliche Beobachtung wie § 270.

## No. IX. und X.

### §. 274.

Werden dieſe beyden Verſuche unter einander verglichen, ſo ſieht man, daß die abſolute Elaſticität, bey gleicher Länge und Breite, ungefähr den Höhen proportional iſt.

## No. XI. und XII.

### §. 275.

Dieſe mit einerley Holz angeſtellten beyden Verſuche lehrten nichts beſonders. Der nach der Theorie beſtimmte abſolute Widerſtand nach beyden Kanten kommt mit dem Tabelle I. Verſuche 15 angegebenen überein.

## No. XIII. XIV. und XV.

### §. 276.

Bey den drey Verſuchen variirte der Ausdruck für E K K von einer Beobachtung zur andern bald mehr, bald weniger. Uebrigens beſtättigen dieſe Verſuche, was wir ſchon geſagt haben, daß die Elaſticität eine Funktion der Länge iſt.

## No. XVI. und XVII.

### §. 277.

Bey den Verſuchen mit dieſen Hölzern hat man angefangen, den Einfluß zu bemerken, welchen die Dauer der Belaſtung hat. Da die größte Ordinate durch die längere Dauer größer wurde; ſo wurde die Größe E K K kleiner. Hieraus ſchloß man auf die unvollkommene Elaſticität der Körper; denn wenn ſie vollkommen

Die Zeit, während welcher ein Gewicht auf den Körper wirkt, hat Einfluß auf den Ausdruck für die Elaſticität.

elaſtiſch geweſen wären; ſo hätten ſie im erſten Augenblick, und bey einer beſtimmten Laſt, die ganze Krümmung annehmen müſſen, der ſie fähig waren.

### No. XVIII.

### §. 278.

Uebereinſtimmung der Theorie mit der Erfahrung.

Wenn man den durch die Rechnung gefundenen abſolut negativen Widerſtand dieſer Hölzer mit demjenigen vergleicht, den wir in der erſten Tabelle (Verſuch 21) gefunden haben; ſo findet man, daß die Theorie über dieſe Art des Widerſtandes mit der Erfahrung übereinſtimmt.

## Dritte Tabelle.

### §. 279.

Object der in der dritten Tabelle aufgezählten Verſuche.

Wir glaubten, daß die Reſultate, wozu wir gelangen würden, mehr Zutrauen haben möchten, wenn zu den Verſuchen Körper von den größten Dimenſionen genommen würden; und daß ihr Nutzen deſto ausgebreiteter ſeyn werde, je mehr dieſe Körper, ſowohl nach ihrer Form, als nach ihrer Organiſation, denen gleich kämen, welche zu den großen Bauwerken öfters gebraucht werden. Da uns nun die ſchon oben beſchriebene Zurüſtung Mittel darbot, noch ſtärkere Hölzer, als ſelbſt Buffon zu ſeinen Verſuchen über den Widerſtand wählte, krümmen zukönnen; ſo ließen wir ſieben Stück Eichenholz von bloß behauenen Bäumen zubereiten, um die Elaſticität oder ſpecifiſche Steifheit des auf dieſe Weiſe zubereiteten Holzes mit der möglichlichſten Genauigkeit zu beſtimmen.

Die Länge dieſer Hölzer war bey zwey auf einander folgenden Verſuchen einerley, und man legte ſie bloß auf ihrer andern Kante. Der Unterſchied in der Länge der verſchiedenen Körper war ungefähr conſtant, und mit den längſten Stücken wurden die meiſten Verſuche gemacht.

Da die Unterſuchungen, welche bey jedem Verſuche angeſtellt wurden, ähnliche Reſultate, wie die vorigen gaben; ſo wird es nicht nöthig ſeyn, dieſe einzeln anzuführen. Wir begnügen uns, bloß die merkwürdigen Erſcheinungen, welche ſich ergaben, anzuzeigen.

No. I.

1, 2, 3 und 4. Verſuch.

§. 280.

Bey dieſen vier Verſuchen ergab ſich ein anmerkenswerther Unterſchied in dem Ausdruck zwiſchen der Elaſticität für den erſten Augenblick berechnet, und derjenigen, die berechnet iſt, nachdem die Belaſtung ſchon einige Zeit gedauert hat. Bey längerer Dauer der Belaſtung wird die Elaſticität geringer.

Die Verſchiedenheiten in den Reſultaten des dritten Verſuchs können nur aus den verſchiedenen Beſchaffenheiten der Atmosphäre während des Verſuches erklärt werden.

No. II.

5, 6, 7 und 8. Verſuch.

§. 281.

Dieſe vier Verſuche beſtättigen, daß die Elaſticität in einem gewiſſen Verhältniſſe zu den Dimenſionen des zu dem Verſuche gewählten Körpers ſteht.

No. III.

9, 10, 11 und 12 Verſuch.

§. 282.

Aus der Vergleichung der beyden Verſuche 9 und 10 ergeben ſich zwey Reſultate, die denjenigen, welche wir bisher beobachtet haben, entgegen ſind. Abweichung, die nur aus einer irregulären Organiſation des zu dem Verſuche gewählten Holzes erklärt werden kann.

Die mittlere Elaſticität von No. IX. mußte eigentlich größer ſeyn, als die von No. X., da doch das Gegentheil Statt hatte. Eine ſolche Abweichung von der gewöhnlichen Regel iſt nur durch die beſondere Lage und Beſchaffenheit der Fibern des Holzes erklärbar. Dieſe konnten vielleicht ſo organiſirt ſeyn, daß ſie nach der kleinſten Dimenſion ſtärker, als nach der größern widerſtanden.

Der Verſuch No. IX. beweiſet aufs neue die unregelmäßige Organiſation dieſes Holzes, obgleich die Beſchaffenheit der Luft auch einigen Einfluß auf die beobachteten Erſcheinungen gehabt haben kann.

## No. IV.

### 13, 14, 15 und 16. Verſuch.

§. 283.

Widerholte Biegungen vermehren die Biegſamkeit eines Körpers.

Die Elaſticität dieſes Stückes war bey den vier Verſuchen nur wenig verſchieden. Indeß muß man bemerken, daß die nach dem 13ten Verſuch erhaltene größer iſt, als die übrigen, welches, unabhängig von allen andern Urſachen, ſchon daraus erklärlich ſeyn würde, daß die Biegſamkeit eines Körpers durch wiederholte Biegungen vermehrt wird.

## No. V.

### 17 . . . . . 24. Verſuch.

§. 284.

Die Lage der Aeſte und andere Irregularitäten verändern den Ausdruck für die Elaſticität.

Die Verſuche 21 und 22, in deren Verlauf man bey jeder Beobachtung die Elaſticität beynahe unveränderlich fand, zeigen, durch ihren Unterſchied mit den Reſultaten der vorhergehenden, die unregelmäßige Organiſation dieſes zu den Verſuchen gewählten Holzes.

Es iſt ganz außer allem Zweifel, daß dieſe Abweichungen nicht Statt haben könnten, wenn die Fibern der Körper genau parallel mit einander wären. Da aber der Parallelismus dieſer Fibern faſt immer durch die in dem Holze ſich befindenden Fibern geſtört iſt; ſo muß auch die Elaſticität nothwendig irregulär werden, und dieſe Irregularität hängt alſo jedesmahl von der Größe und Richtung der dieſelbe verurſachenden Aeſte, und von deren Lage gegen die Unterſtützungspunkte ab. Man ſieht alſo leicht ein, daß indem man die Länge des feſten Körpers zwiſchen den Unterſtützungspunkten ändert, ſo vermehrt oder vermindert man ſeinen Widerſtand in einem größern Verhältniſſe, als nach der Theorie und einer Reihe von Verſuchen ſeyn könnte.

Bey dem 23ſten und 24ſten Verſuch bemerkt man, daß der Ausdruck für die Elaſticität von einer Beobachtung bis zur andern größer wurde; da er hingegen bey den vorhergehenden Verſuchen faſt immer vom Anfange bis zum Ende abnahm.

No.

25 . . . . . 36 Verſuch.

§. 285.

Dieſes Stück ſchien uns geſunder und regelmäßiger organiſirt zu ſeyn, als alle die bisher gehabten Körper. Man ſieht auch, daß die Dauer der Belaſtung wenigen Einfluß auf den Werth von EKK hat, und wirklich muß dieſer Einfluß auch geringer ſeyn, je vollkommener die Organiſation iſt. Was die Anomalien betrift, die hier Statt hatten, ſo müſſen dieſe vorzüglich der Beſchaffenheit der Atmoſphäre zugeſchrieben werden.

No. VII.

37 . . . . . 44 Verſuch.

§. 286.

Dieſe Verſuche zeigten nichts, was nicht ſchon bey den vorhergehenden bemerkt worden war.

Vierte Tabelle.

§. 287.

Da das Fichtenholz bey Bauwerken häufig gebraucht wird; ſo haben wir auch damit Verſuche angeſtellt, um deſſen ſpecifiſche Elaſticität kennen zu lernen. Einrichtung der vierten Tabelle.

Wir nehmen hierzu zwey Stücke geſundes wohl behauenes ungefähr 6,5^m^ langes Holz.

§. 288.

Wir haben ſchon einigemahl Gelegenheit gehabt zu bemerken, daß das Zimmerholz manchmahl mehr nach ſeiner kleinern, als nach ſeiner größern Dimenſion widerſteht. Um uns zu verſichern, daß dieſes Phänomen von der Lage der Fibern herrührt; ſo gaben wir dem zu den Verſuchen beſtimmten Fichtenholze gleiche Dimenſionen. Dieſes Holz wurde nun auf ſeine beyden Seiten gelegt, wäre die Organiſation vollkommen; und die Fibern parallel mit einander geweſen, ſo hätte es, nach beyden Seiten gelegt, gleichen Widerſtand leiſten müſſen. Wenn man aber die ſechs Warum die Dimenſionen des zu den Verſuchen gewählten Fichtenholzes gleich waren.

erſten Verſuche mit den ſechs folgenden vergleicht; ſo findet man, daß dieſe für die abſolute Elaſticität einen etwas größern Werth geben, als jene.

Die zwölf letztern Verſuche gaben keine Verſchiedenheit, außer der ſechste, welcher eine viel größere Elaſticität gab, als er in Vergleichung mit den andern hätte geben ſollen. Dieſe Verſchiedenheit ſchreiben wir der beſondern Beſchaffenheit der Atmosphäre, während des Verſuches, zu.

§. 289.

Die Organiſation des Fichtenholzes iſt viel regelmäßiger, als die des Eichenholzes.

Im Allgemeinen findet man, daß die Dauer der Belaſtung wenig Einfluß auf den Ausdruck für die abſolute Elaſticität des Fichtenholzes hat. Dieſes kommt, wie wir ſchon geſagt haben, von der regelmäßigen Organiſation der zu den Verſuchen gewählten Stücke her.

## Fünfte Tabelle.

§. 290.

Object der fünften Tabelle

Die Theorie (§. 15.) zeigt, daß die abſolute Elaſticität, in ſofern ſie den Widerſtand gegen die Biegung hervorbringt, dem Produkte aus der Breite der rectangulären Brechungsebene in das Quadrat ihrer Höhe proportional iſt.

Wir haben deshalb unterſucht, ob die Erfahrung mit dieſem Raiſonnement übereinſtimmt, und die fünfte Tabelle enthält die Reſultate des Calculs, welchen wir, um uns davon zu verſichern, angeſtellt haben.

Um die Einmiſchung aller fremdartigen Umſtände zu vermeiden, welche die zu unterſuchende Regel hätten modificiren können; ſo haben wir immer ein und dieſelben Stücke in ihren beyderley Lagen mit einander verglichen.

§. 219.

Formel zur Berechnung der ſiebenten Colonne.

Nimmt man die abſolute Elaſticität eines feſten Körpers nach einer Richtung $EKK$; die Höhe der Brechungsebene $h$, und deren Breite $a$; ſind ferner $E'KK'$, $h'$ und $a'$ die abſolute Elaſticität deſſelben Körpers und die Höhe und Breite der Brechungsebene nach der andern Ebene, und iſt endlich $X$ der Exponent der Potenz der Höhe, welche die Größen $a h^x$, $a' h'^x$ den abſoluten Elaſticitäten $EKK$, $E'K'K'$

proportional macht; ſo haben wir $EKK : E'K'K' = ah^x : a'h'^x$. Und hieraus:

$$x = \frac{\log. EKK + \log. a - \log. E'K'K' - \log. a'}{\log. h - \log. h'}$$

§. 292.

Nachdem wir nach dieſer Formel die ſiebente Colonne in der fünften Tabelle berechnet hatten; ſo ſuchten wir für jedes Stück den mittlern Werth von $\alpha$. Dieſer Werth iſt in der kleinen Tafel auf der fünften Tabelle enthalten. Hieraus nahm man endlich das Mittel wieder, und fand daſſelbe = 2,0888, welche Größe von der durch die Theorie erhaltenen Zahl 2 ſo wenig unterſchieden iſt, daß man dieſe allgemein annehmen darf.

## Sechste Tabelle.

§. 293.

*Die Fibern können ſich nicht biegen, ohne über einander weg zu gleiten.*

Wir haben ſchon im Anfange dieſes Buches geſehen, daß die Fibern eines ſich beugenden Körpers ſich nicht gleich ſtark ausdehnen. Theorie und Erfahrung zeigen, daß ihre Ausdehnung der Zuſammenpreſſung ſtärker iſt, je weiter ſie von der Umdrehungsachſe entfernt ſind, welches aber nicht Statt haben könnte, wenn ſie, indem ſie über einander weggleiten, ihre Lage gegen einander nicht veränderten.

§. 294.

*Man hat bisher auf ihre Longitudinal-Adhäſion nicht geachtet.*

Wenn man annimmt, daß die Fibern keine Cohäſion zu einander hätten, und bloß an ihren Enden, und zwar auf die Art zuſammen gebunden wären, daß dieſe Enden während der Biegung ihre reſpective Lage behielten, ſo würde die abſolute Elaſticität dieſes Bündels unabhängig von der Länge ſeyn. Es iſt alſo klar, daß die nach Galilei's und Leibnitzens Hypotheſen gefundenen Formeln eigentlich nur für Körper von dieſer Art ſtrenge richtig ſeyn können, weil dabey auf die Longitudinal-Cohäſion der Fibern, die bey den verſchiedenen Körpern verſchieden iſt, keine Rückſicht genommen iſt.

§. 295.

*Sie vermehrt die abſolute Elaſticität.*

Was auch die Urſache dieſer Cohäſion ſeyn mag, ſo iſt doch ſo viel gewiß, daß ſie die Biegung erſchwert, oder den Ausdruck E K K der Elaſticität oder abſoluten

Steifheit vergrößert, indem ſie ſich der Bewegung, welche die Fibern annehmen möchten, widerſetzt. Ferner iſt leicht einzuſehen, daß die Cohäſion der Menge der cohärirenden Theile, oder der Länge des Körpers proportional ſeyn würde, wenn ſie gleichförmig, und die Fibern vollkommen homogen wären.

## §. 296.

Wenn ſie gleichförmig wäre, ſo würde ſie bey gleichen Dimenſionen des Körpers deſſen Länge proportional ſeyn.

Die nach einander Statt habenden verſchiedenen Entfernungen der beyden Unterſtützungen für ein und denſelben Körper ſeyn $2\,f$; $2\,f'$; $2\,f''$ u. ſ. w. und die beobachtete Elaſticität bey jeder von dieſen verſchiedenen Längen ſey $E\,K\,K$; $E'K'K'$; $E''K''K''$ u. ſ. w. ſo erhält man folgende Gleichungen :

$$\frac{f}{f'} = \frac{E\,K\,K}{E'K'K'};\quad \frac{f}{f''} = \frac{E\,K\,K}{E''K''K''};$$

$$\frac{f'}{f''} = \frac{E'K'K'}{E''K''K''}\ \text{u. ſ. w.}$$

## §. 297.

Warum dieſes Verhältniß nicht Statt hat.

Hierbey aber iſt eine ſolche Vollkommenheit bey den Körpern vorausgeſetzt, wie ſie in der Natur nicht Statt findet. Denn die verſchiedenen zufälligen Urſachen, welche auf die Organiſation der Körper, und vorzüglich des Holzes einwirken, machen, daß die Cohäſion feſter Körper von einerley Art dennoch verſchieden iſt, ſo daß das zweyte Glied der vorſtehenden Gleichung durch einen gewiſſen Coefficienten $m$ multiplicirt werden muß, welcher, wenn von allen übrigen abſtrahirt wird, für ein und daſſelbe Stück unveränderlich ſeyn muß. Man hat alſo

$$\frac{f}{f'} = m\,\frac{E\,K\,K}{E'K'K'}.$$

## §. 298.

Gleichung, welche der Erfahrung entſpricht.

Wie nun auch die Größe $m$ beſchaffen ſeyn mag, ſo muß doch das Verhältniß $\frac{f}{f'}$ und $\frac{E\,K\,K}{E'K'K'}$, eine ſolche Form haben, daß für $f = f'$ auch $E\,K\,K = E'K'K'$ ſeyn muß. Zu einem der Glieder der vorſtehenden Gleichung muß alſo

eine unbeſtimmte Größe C hinzugefügt werden, wodurch dieſer Bedingung ein Genüge geſchehen kann. Dieß gibt

$$C + \frac{f}{f'} = m \frac{E K K}{E' K' K'}.$$

Für f = f′ und E K K = E′K′K′ wird C = m — 1, und folglich

$$\frac{f}{f'} - 1 = m\left(\frac{E K K}{E' K' K'} - 1\right)$$

$$\frac{f}{f''} - 1 = m\left(\frac{E K K}{E'' K'' K''} - 1\right)$$

$$\frac{f'}{f''} - 1 = m\left(\frac{E' K' K'}{E'' K'' K''} - 1\right).$$

Für einen Körper von derſelben Art, deſſen Längen 2 ′f; 2 ′f′; 2 ′f″ u. ſ. w. und deſſen hiermit correſpondirende Elaſticität ′E ′K ′K; ′E′ ′K′ ′K′ u. ſ. w. iſt wird

$$\frac{'f}{'f'} - 1 = m'\left(\frac{'E\ 'K\ 'K}{'E'\ 'K'\ 'K'} - 1\right)$$

$$\frac{'f}{'f''} - 1 = m'\left(\frac{'E\ 'K\ 'K}{'E''\ 'K''\ 'K''} - 1\right) \text{ u. ſ. w.}$$

## §. 299.

Es muß noch bemerkt werden, daß die Longitudinal-Cohäſion der holzartigen Fibern, eben ſo wie ihre Ausdehnung, nach der Beſchaffenheit der Atmosphäre größer und kleiner werden muß. Die abſolute Elaſticität eines und deſſelben Stückes iſt alſo Veränderungen unterworfen, welche mit dieſer Beſchaffenheit, die ſich faſt augenblicklich abändert, correſpondirt.

Form des Coefficienten für das Verhältniß der Elaſticität.

## §. 300.

Wird nun die Summe der Wirkung auf die Longitudinal-Cohäſion, welche von der, zwiſchen dem Anfange des Verſuches bis zu der Beobachtung Statt gehabten Veränderung der Atmosphäre abhängt, allgemein v genannt; ſo wird, wie auch

das Geſetz für dieſe Wirkung übrigens ſeyn mag, der Coefficient des Verhältniſſes der Elaſticitäten E K K und E′ K′ K′ durch m + v dargeſtellt ſeyn, in welcher Funktion der Größe v poſitiv und negativ ſeyn kann.

Die bey ein und demſelben feſten Körper gemachten Beobachtungen geben alſo folgende Gleichungen:

$$\frac{f}{f'} - 1 = (m + v).\left(\frac{E\,K\,K}{E'\,K'\,K'} - 1\right)$$

$$\frac{f}{f''} - 1 = (m + v').\left(\frac{E\,K\,K}{E''\,K''\,K''} - 1\right) \text{ u. ſ. w.}$$

und für andere Körper würde man ähnliche Gleichungen finden.

§. 301.

Er beſteht wirklich aus zwey Theilen.

Aus dem Bisherigen folgt, daß der Coefficient des Verhältniſſes der Elaſticitäten, welcher den beobachteten Abweichungen entſprechen ſoll, aus zwey Theilen beſteht, deſſen erſter Theil m für jedes Stück unveränderlich iſt, und von der Organiſation deſſelben abhängt; der zweyte Theil aber iſt von der Organiſation gänzlich unabhängig, und rührt einzig von der während des Verſuches Statt habenden hygrometriſchen und thermometriſchen Beſchaffenheit der Luft her.

Der erſte Theil m dieſes Coefficienten wird ſich durch directe Verſuche beſtimmen laſſen, und hernach würde man auch den zweyten Theil v durch einen oder mehrere Verſuche erhalten. Aber die Beſtimmung dieſer letztern Größe würde gänzlich unnütz ſeyn, weil man dadurch auf die Elaſticität eben deſſelben Stückes für eine andere Zeit, wo die Faktoren dieſer Größe nicht mehr dieſelben ſind, doch nicht würde hinausrechnen können.

Um dieſen Theil directe und ſtrenge zu beſtimmen, müßte man die, während eines Verſuches Statt habende Beſchaffenheit der Atmosphäre für jeden Augenblick beobachten, um das Geſetz der Variationen dieſer verſchiedenen Beſchaffenheiten, und den Einfluß derſelben auf die Biegſamkeit und Steifheit der vegetabiliſchen Fibern zu kennen, wobey ſich aber unüberwindliche Schwierigkeiten finden würden. Uebrigens würde dieſe Beſtimmung, wie wir ſchon geſagt haben, nur für das ein-

zelne, zu dem Verſuche gewählte Stück gelten, und zu keinen nützlichen Folgerungen leiten.

Man muß ſich alſo begnügen, den Werth von m, m′, m″, m‴, u. ſ. w. für eine gewiſſe Anzahl feſter Körper von derſelben Art zu ſuchen, und wenn man aus allen dieſen den mittlern Werth nimmt; ſo erhält man den Einfluß, welchen die ſpecifiſche longitudinal-Cohäſion der Körper auf ihre abſolute Elaſticität hat.

§. 302.

Wie man den mittlern Werth des Einfluſſes der Cohäſion auf die Elaſticität beſtimmen kann.

Bedenkt man, daß die Größe v das Produkt von entgegengeſetzten Richtungen wirkenden Urſachen, oder eine Summe von Wirkungen ſeyn kann, die ſich gegenſeitig zu zernichten trachten, und ſich wirklich vernichten würden, wenn die während des Verſuches Statt habende Beſchaffenheit der Atmosphäre von der Art wäre, daß ſie ſucceſſivement bald über, bald unter einem angenommenen beſtimmten Grad des Thermometers und Hygrometers wäre; ſo würde man, wenn dieſes wirklich erfolgte, den mittlern Werth für den Einfluß der Cohäſion auf die Elaſticität beſtimmen können. Da aber ein ſo regulärer Gang in der Abwechſelung der Atmosphäre nur das Reſultat von außerordentlichen Urſachen ſeyn kann; ſo ſieht man wohl, daß am Ende eines Verſuches die Größe v noch immer einen reellen, poſitiven oder negativen, Werth haben wird.

§. 303.

Wenn man nun zwar nicht annehmen kann, daß bey einem einzigen Verſuch die entgegengeſetzten Wirkungen, deren Summe v darſtellt, ſich genau aufheben werden; ſo kann dieß doch für eine Folge von Verſuchen, die in dem Laufe eines ganzen Jahres vorgenommen werden, Statt haben. Denn man kann als gewiß annehmen, daß in dieſem Zeitraume die von der Wärme und Kälte, ſo wie von der Feuchtigkeit und Trockenheit der Atmosphäre herrührenden Wirkungen ſich aufheben werden.

§. 304.

Formel für den mittlern Werth des von der Organiſation des Holzes abhängenden Theiles des Coefficienten.

Nimmt man dieſes an, ſo hat man für ein und daſſelbe Stück dieſe ſchon oben gefundene Gleichung

$$\frac{f}{F} - 1 = (m + v)\left(\frac{EKK}{E'K'K'} - 1\right)$$

$$\frac{f}{f''} - 1 = (m + v')\left(\frac{E\,K\,K}{E''\,K''\,K''} - 1\right) \text{ u. ſ. w.}$$

und für ein zweytes Stück

$$\frac{'f}{'f'} - 1 = (m' + 'v).\left(\frac{'E\,'K\,'K}{'E''\,'K''\,'K} - 1\right)$$

$$\frac{'f}{'f''} - 1 = (m' + 'v').\left(\frac{'E\,'K\,'K}{'E''\,'K''\,'K''} - 1\right) \text{ u. ſ. w.}$$

Sind in dieſen Gleichungen die Größen f, f′, f″ u. ſ. w. ′f, ′f′, ′f″ u. ſ. w. E K K, E′K′K′, E″K″K″ u. ſ. w. ′E ′K ′K′, ′E′ ′K′ ′K′ u. ſ. w. durch Beobtungen gegeben; ſo kann man dadurch die Coefficienten (m + v), (m + v′), u. ſ. w. (m′ + ′v), (m′ + ′v′) u. ſ. w. beſtimmen. Sind dieſe Beobachtungen ſo mannigfaltig und ſo angeſtellt, daß die Wirkungen der Verſchiedenheiten der Atmosphäre und der andern, von dem Organismus des Holzes unabhängigen Urſachen, auf die longitudinal-Cohäſion der Fibern ſich gegenſeitig aufheben, und nennt man die mittlere Cohäſion für alle Stücke M, die Zahl der Beobachtungen aber n; ſo hat man

$$(m + v) + (m + v') + \ldots\ldots + (m' + 'v) + (m' + 'v') + \ldots\ldots + (m'' + ''v) + (m'' + ''v') + \ldots\ldots = M\,n.$$

## §. 305.

Einrichtung der ſechsten Tabelle.

Die ſechste Tabelle enthält die Anwendung dieſer Formel auf die mit dem Eichenholze gemachten Verſuche.

Die erſte Colonne zeigt die Länge der Hölzer; die zweyte und dritte die Dimenſionen der Behauung; die vierte die durch die Beobachtung gefundene abſolute Elaſticität; die fünfte und ſechste das Verhältniß der Länge und der Elaſticität; die ſiebente die Coefficienten (m + v), (m + v′) u. ſ. w.; die achte den von der Organiſation des Holzes herrührenden Theil m des Coefficienten; die neunte endlich der Theil v des Coefficienten, welcher von fremdartigen, von dieſer Organiſation unabhängigen Urſachen, vorzüglich von der Verſchiedenheit der Atmosphäre herrührt.

## §. 306.

Die hauptſächlichſten der bemerkten Abweichungen und deren Urſachen.

Durchläuft man die ſiebente Colonne dieſer Tabelle, ſo ſieht man, daß einige Zahlen das Zeichen — haben; man bemerkt auch, daß einige viel größer, wie die übrigen ſind. Es iſt ſchwer, von dieſen Abweichungen eine andere Urſache, als die

Irregularität in der Organiſation des zu den Verſuchen gewählten Holzes, anzugeben: Vielleicht ſind aber auch Fehler bey den Beobachtungen vorgefallen.

Am Ende der ſechsten Tabelle haben wir die verſchiedenen Werthe des aus den Verſuchen berechneten Coefficienten m + v nach ihrer Größe geordnet.

Unter 62 Reſultaten waren 53 poſitiv, und 9 negativ; woraus ſich ſchon ergibt, daß der geſuchte Werth poſitiv ſeyn muß.

Unter den erſtern ſind 11 zwiſchen 0 und 1; 26 zwiſchen 1 und 2; 10 zwiſchen 2 und 3; 3 zwiſchen 3 und 4 und endlich ſind 3 zwiſchen 4 und 5 und darüber, bis zu 11,3674.

Aus dieſer Aufzählung ergibt ſich, daß die meiſten zwiſchen 1 und 2 ſind. Der mittlere Werth von m muß alſo auch zwiſchen dieſen Zahlen enthalten ſeyn.

## §. 307.

Um dieſen Werth mit möglichſter Genauigkeit zu beſtimmen, haben wir geglaubt, daß auf die gar zu weit von dieſer Grenze entfernten, poſitiven oder negativen Reſultate keine Rückſicht genommen werden dürfe. Demnach ſind alle über die Zahl 3 hinausgehenden Reſultate nicht beachtet, wodurch deren Anzahl auf funfzig reducirt wird, worunter ſich drey negative befinden. Es darf darauf nicht geachtet werden.

## §. 308.

Die Summe 62,7239 dieſer Reſultate durch 50 dividirt gibt den reducirten Werth von m = 1,2548, welche Größe wir = 1,3000 genommen haben, um einen einfachern Ausdruck dafür zu bekommen. Mittler Werth des Coefficienten m + v.

Wird dieſer Werth für m + v in die Gleichung

$$\frac{f}{f'} - 1 = (m+v)\left(\frac{E K K}{E' K' K'} - 1\right)$$

geſetzt; ſo erhält man

$$\frac{f}{f'} - 0,3\left(\frac{E K K}{E' K' K'} - 1\right) = \frac{E K K}{E' K' K'}.$$

Wäre die longitudinal-Cohäſion gleichförmig, ſo hätte man

$$\frac{f}{f'} = \frac{E\,K\,K}{E'K'K'}.$$

Die Größe $0,3\left(\frac{E\,K\,K}{E'K'K'} - 1\right)$, welche den Unterſchied des Verhältniſſes der Längen zu dem der Elaſticitäten darſtellt, gibt alſo die Vergrößerung dieſer Cohäſion für Eichenholz, wie ſie ſowohl von der Organiſation, als auch von andern zufälligen Urſachen abhängt.

## Siebente Tabelle.

### §. 309.

Einrichtung dieſer Tabelle.

Die vorſtehenden Formeln, auch auf die mit Fichtenholz angeſtellten Verſuche angewandt, haben die Zahlen für die fünf letzten Colonnen dieſer Tabelle gegeben.

Zwey und zwey dieſer Verſuche zuſammen genommen haben 60 Reſultate gegeben, wovon nur eins negativ iſt. Von den übrigen 59 ſind 32 zwiſchen 0 und 1; 22 zwiſchen 1 und 2; 4 zwiſchen 2 und 3; und 1 zwiſchen 3 und 4. Der mittlere Werth von m + v muß folglich poſitiv ſeyn, und ſich der Einheit ſehr nähern.

### §. 310.

Mittler Werth von m + v für Fichtenholz.

Nach dieſer Bemerkung haben wir die von dieſer Grenze zu ſehr abweichenden Reſultate ganz außer Acht gelaſſen. Dieſe Reſultate der gar zu großen Abweichungen ſind — 1,8098 und 3,6503. Die Summe 59,7978 durch die Anzahl der übrigbleibenden 58 Reſultate dividirt gibt den geſuchten mittlern Werth = 1,0309. Ohne alſo einen bedeutenden Fehler zu begehen, kann man bey Fichtenholz M = 1 ſetzen, wodurch die Formel für das Verhältniß der Längen zu den Elaſticitäten viel einfacher wird, indem man alsdann hat

$$\frac{f}{f'} = \frac{E\,K\,K}{E'\,K'K'}$$

$$\frac{f}{f''} = \frac{E\,K\,K}{E''K''K''}, \text{ u. ſ. w.}$$

Dieſe einfache Formel beweiſet die regelmäßige Organiſation dieſer Holzart, deren Fibern im Allgemeinen viel gleichartiger und nicht ſo krumm ſind, wie die Fibern des Eichenholzes.

## Achte Tabelle.

### §. 311.

Es ſoll jezt die abſolute Elaſticität eines Stückes Eichenholz von gegebenen Dimenſionen aus den vorſtehenden Verſuchen gefunden werden, um hiernach die abſolute Elaſticität irgend eines andern Stückes von derſelben Holzart durch Vergleichung beſtimmen zu können. Verhältniß der abſoluten Elaſticität zweyer Hölzer von gleichen Dimenſionen.

Nach der Theorie und den vorſtehenden Tabellen haben wir folgende zwey Gleichungen:

$$\frac{E K K}{E' K' K'} = \frac{a h h}{a' h' h'}$$

$$\frac{f}{f'} - 1 = 1{,}3 \left( \frac{E' K' K'}{E'' K'' K''} - 1 \right)$$

Woraus der Werth von $E'' K'' K''$ als eine Funktion der beobachteten Elaſticität und der Dimenſionen $f$, $f'$, $a$, $h$, $a'$ und $h'$ gefunden werden muß.

Sezt man in der zweyten Gleichung den aus der erſten für $E' K' K'$, ſo wird ſie

$$\frac{f - f'}{f'} = 1{,}3 \left( \frac{E K K a' h' h' - E'' K'' K'' a h h}{E'' K'' K'' a h h} \right)$$

folglich iſt

$$E'' K'' K'' = \frac{1{,}3 \, (E K K a' h' h') \, f'}{(f + 0{,}3 f') \, a h h}.$$

### §. 312.

Nimmt man an, daß ein Stück, deſſen Elaſticität geſucht wird, $1^m$ lang und $1^m$ in der Behauung ſey, ſo wird $f' = a' = h' = 1$, und für die vorſtehende Gleichung erhält man Formel für die ſpecifiſche Elaſticität eines Cubik-Metre's.

$$E'' K'' K'' = \frac{1{,}3 . E K K}{(f + 0{,}3) \, a h h},$$

Welche dazu dient, die Elaſticität eines Cubik-Metre's zu berechnen, und wovon die 5te Colonne der 8ten Tabelle die Reſultate enthält.

Für E K K haben wir nach einander die, bey einem jeden der mit dem Eichenholze angeſtellten 44 Verſuche, gefundene Elaſticität ſubſtituirt, und für a, h und f haben wir die Dimenſionen des bey dieſen Verſuchen gebrauchten Holzes geſetzt, und hierdurch haben wir eben ſo viele verſchiedene Werthe für die geſuchte Elaſticität bekommen.

§. 313.

Unterſchied der nach den verſchiedenen Hölzern berechneten abſoluten Elaſticität.

Obgleich dieſe Werthe weniger oder mehr von einander differiren, ſo ſieht man doch, daß ſie für ein und daſſelbe Stück wenig variiren, daß aber die Unterſchiede für verſchiedene Stücke ſehr groß ſind. So gibt z. B. der 13te mit dem Holze No. IV. angeſtellte Verſuch für den Cubik-Metre die abſolute Elaſticität 16627000, nnd der 18te mit No. V. gemachte Verſuch gibt hierfür nur 7140800, eine Größe, welche ungefähr nur 3/7 der vorigen iſt.

§. 314.

Hieraus ſieht man, wie weit die Verſchiedenheit feſter Körper von einerley Art ſich erſtrecken kann. Zugleich zeigt ſie die Nothwendigkeit, eine große Menge von Verſuchen anzuſtellen, um ſo zu einem mittlern Reſultate zu gelangen, welches ſich dem geſuchten Werth ſo viel wie möglich nähert.

§. 315.

Wie die mittlere ſpecifiſche Elaſticität beſtimmt werden muß.

Wir bemerken hier, daß für dieſen Werth nicht aus allen, nach einem jeden Verſuch berechneten, Ausdrücken für die Elaſticität das Mittel genommen werden muß; ſondern es muß zuerſt aus den verſchiedenen für ein und daſſelbe Stück erhaltenen Reſultaten ein mittler Werth, und alsdann aus dieſen verſchiedenen mittlern Werthen wiederum das Mittel genommen werden.

§. 316.

Ihr Werth für Eichenholz.

Die erſtern mittlern Werthe aus den für ein und daſſelbe Stück erhaltenen Reſultaten, ſtehen in der ſechsten Colonne, und das Mittel aus dieſen ſieben Reſul-

taten = 11784451, welches die ſpecifiſche Elaſticität des Eichenholzes darſtellt, iſt in der 7ten Colonne enthalten.

## Neunte Tabelle.

### §. 317.

Formel zur Beſtimmung der ſpecifiſchen Elaſticität des Fichtenholzes.

Es ſey E K K die abſolute Elaſticität eines Stückes Fichtenholz; die Höhe und Breite deſſelben ſey h und a. Eben ſo ſeyn E′K′K′, h′ und a′ die Elaſticität und die Dimenſionen der Baſis eines andern Stückes von gleicher Länge. Man erhält alsdann

$$\frac{EKK}{E'K'K'} = \frac{ahh}{a'h'h'}.$$

Nennt man die Länge zweyer Stücke, deren Elaſticität E′K′K′ und E″K″K″ iſt, 2f und 2f′; ſo hat man (§ 310.)

$$\frac{f}{f'} = \frac{E'K'K'}{E''K''K''}.$$

Werden dieſe Gleichungen combinirt, ſo wird

$$E''K''K'' = \frac{EKK\ a'h'h'f'}{ahhf}.$$

Und wenn man $a' = h' = f'' = 1$ annimmt,

$$E''K''K'' = \frac{EEK}{ahhf}.$$

Wornach die ſpecifiſche Elaſticität des Fichtenholzes durch eine Reihe von Verſuchen leicht zu beſtimmen iſt.

Wir haben uns dieſer Formel zur Berechnung der fünften Colonne der neunten Tabelle bedient, deren Einrichtung vollkommen wie die der vorigen Tabelle iſt.

Die 6te Colonne gibt ſo viele Werthe für die Elaſticität eines Cubik-Metre's, als die Anzahl der Stücke war, mit denen Verſuche gemacht wurden. Und

die 7te Colonne gibt endlich die mittlere Elaſticität für die verſchiedenen gebrauchten Körper.

§. 318.

Unterſchied der Elaſticität für die beyden zu den Verſuchen gewählten Stücke.

Wir haben ſchon oben bey der Erklärung der vierten Tabelle geſagt, daß wir, um uns von dem Einfluſſe, welchen die Lage der Fibern auf ihren Widerſtand hat, zu überzeugen, dem zu den Verſuchen beſtimmten Fichtenholze gleiche Dimenſionen gaben, und daß wir dabey nach der einen Seite einen größern Widerſtand fanden, als nach der andern Seite. Dieſer Unterſchied war bey den beyden zu dieſen Verſuchen gewählten Stücken noch größer. Hierdurch wird das beſtätiget, was wir ſchon oben geſagt haben, daß man eine Menge Verſuche mit Körpern von einerley Art anſtellen müſſe, um ihre ſpeciſiſche Elaſticität mit der möglichſten Genauigkeit zu erhalten.

§. 319.

Verhältniß der ſpecifiſchen Elaſticität des Eichen- und Fichtenholzes.

Die ſpecifiſche Elaſticität des Fichtenholzes fand man = 8161128. Vergleicht man dieſe mit der ſpecifiſchen Elaſticität des Eichenholz, wofür wir 11784451 gefunden haben; ſo findet man, daß die ſpecifiſche Elaſticität dieſer beyden Holzarten ſich verhalte, ungefähr wie 47 : 63. welches Verhältniß auch ſchon Perronet*) gefunden hat.

---

## Anwendung der Theorie und der vorſtehenden Tabellen auf einige beſondere Fälle. Folgerungen und allgemeine Bemerkungen.

§. 320.

Gleichung zwiſchen den Dimenſionen eines feſten Körpers, der Laſt, womit er beſchwert iſt, und zwiſchen der größten Ordinate der Krümmung.

Es iſt uns jetzt alles Nöthige bekannt, um die verſchiedenen Fragen, welche bey den Bauwerken vorkommen können, mittelſt folgenden beyden Formeln beantworten zu können.

$$EKK = \frac{(11784451)\,(f + 0,3)\,ahh}{1,3}$$

$$EKK = (8161128)\,a\,h\,h.$$

*) Memoires ſur les pieux et pilotis.

Woven die erſte für Eichen =, und die zweyte für Fichtenholz gehört (§ 316. und 319.)

§. 321.

In vorſtehender Formel iſt f die halbe Länge des an ſeinen Enden frey unterſtützten und in ſeiner Mitte beſchwerten Körpers Iſt die Hälfte der Laſt, und b die größte Ordinate der Krümmung; ſo iſt (§ 197.) $EKK = \frac{Pf^3}{3b}$. Werden die in den vorſtehenden Gleichungen für E K K gefundenen Werthe ſubſtituirt; ſo bekommt man

$$\frac{Pf^3}{3b} = \frac{(11784451)(f+0,3)ahh}{1,3}$$

$$\frac{Pf^3}{3b} = (8161128)\, ahh.$$

woraus ſich, wenn von den Größen P, f, a, h, b vier gegeben ſind, die fünfte leicht finden läßt.

§. 322.

Wenn die Körper, auf welche man dieſe Formeln anwenden will, nicht prismatiſch ſind, ſo ſubſtituire man für a h h den noch der Leibnitziſchen Hypotheſe, berechneten Widerſtand ihrer Brechungsebenen. Wenn der gegebene Körper z. B. ein Cylinder mit dem Durchmeſſer = h iſt; ſo muß (0,737381) $h^3$ für a h h ſubſtituirt werden (§ 41.). Anwendung auf den Fall, wenn der feſte Körper ein Cylinder iſt.

§. 323.

Aus § 57 weiß man, daß wenn der Körper an ſeinen Enden eingeklemmt iſt, der Widerſtand bey gleichen Dimenſionen das Doppelte des vorigen wird. Wird die Formel hiernach umgeändert; ſo hat man Wenn der Körper an ſeinen Enden eingeklemmt iſt.

$$\frac{Pf^3}{6b} = \frac{(11784451)(f+0,3)ahh}{1,3}$$

$$\frac{Pf^3}{6b} = (8161128)\, ahh.$$

## §. 324.

Wenn er gegen den Horizont geneigt iſt

Iſt der feſte Körper endlich auf die Art eingeklemmt, wie die Sprengwerke bey den Lehrbogen der Brücken, oder wie die Bänder bey den Zimmerwerken, und nennt man den Winkel, welchen die Richtung des feſten Körpers mit der Vertikallinie macht, ; heißt ferner das Gewicht, welches bey der Neigung eine gleiche größte Ordinate b erzeugt, P′; ſo hat man (§ 69.) $P' = \frac{P'}{(\sin G)^2}$, und dieß gibt

$$\frac{P f^3}{3b (\sin. G)^2} = \frac{(11784451) \cdot (f + 0,3)\, ahh}{1,3}$$

$$\frac{P f^3}{3b (\sin. G)^2} = (8161128)\, ahh.$$

## §. 325.

Auflöſung in Zahlen der § 109 u. f. abgehandelten Frage.

Es würde überflüſſig ſeyn, von dieſen Formeln viele Anwendungen zu machen. Wir wollen jetzt nur noch die größte Höhe ſuchen, welche ein vertikal aufgerichtetes Stück von ſolchen Holzarten, worüber wir Verſuche angeſtellt haben, erhalten kann, ehe es durch ſeine eigene Laſt ſich zu biegen anfängt, angenommen, daß die Grundfläche deſſelben ein Quadrat-Metre ſey.

Hierzu dient die § 124. gefundene Formel

$$h = \sqrt[3]{\left(\frac{200\, EKK}{bbd}\right)}$$

wo h die geſuchte Höhe, b den Durchmeſſer der Grundfläche, und d das ſpecifiſche Gewicht des Körpers bedeutet. Werden für dieſe Größen ihre Werthe, und ſo auch für EKK ſeine (§ 312 und 317.) gefundene Werthe ſubſtituirt; ſo haben wir

$$\left.\begin{array}{r} b = 1^m \\ d = 1080^{Kil.} \\ EKK = 11784451 \end{array}\right\} \text{für Eichenholz.}$$

$$\left.\begin{array}{r} d = 486^{Kil.} \\ EKK = 8161128 \end{array}\right\} \text{für Fichtenholz.}$$

Dieß gibt

1ſtes. Für Eichenholz

$$h = \sqrt[3]{\left(\frac{200\,(h + 0,3)\,(11784451)}{(1,3)\,.\,(1080)}\right)}$$

Oder, da der Bruch 0, 3 im Verhältniß der Höhe h unendlich klein iſt, wird

$$h = \sqrt[3]{\left(\frac{200\,h\,(11784451)}{(1,3)\,(1080)}\right)} = 1295^{m}.$$

2tens. Für Fichtenholz iſt

$$h = \sqrt[3]{\left(\frac{200\,h\,(8161128)}{486}\right)} = 1832^{m}.$$

Eine Säule von Eichenholz, welche ſich unter ihrem eigenen Gewichte biegt, kann alſo nicht ſo groß ſeyn, als eine Säule von Fichtenholz, obgleich die Elaſticität der erſtern größer, als die der zweyten iſt, welches daher rührt, daß das ſpecifiſche Gewicht dieſer letztern Holzart beträchtlich kleiner iſt.

## §. 326.

Die Subtangenten der erzeugenden logarithmiſchen Linien für eichene und fichtene Säulen von gleichem Widerſtande ſind alſo (§ 181.) 1942$^{m}$ und 2748$^{m}$, welche Größen, gegen den Durchmeſſer der Grundfläche dieſer Säulen, ſehr groß ſind. Hierdurch wird dasjenige beſtättigt, was wir oben (§ 182.) ſchon über die Figur der Säulen geſagt haben.

## §. 327.

Wie unſere Formeln zur Beſtimmung des relativen Widerſtandes der Körper gebraucht werden können.

Wenn in den vorſtehenden Formeln (§ 321.) für b die größte Ordinate der größten Krümmung, welche ein Körper, ohne zu brechen, annehmen kann, geſetzt wird; ſo dient ſie dazu, die Laſt zu beſtimmen, welche den Bruch hervorbringen kann, angenommen, daß die Körper wenig Ausdehnbarkeit beſitzen.

Denn da eine Fiber nur bey einer gewiſſen Ausdehnung bricht, und da dieſe Ausdehnung für einerley Fibern der Länge derſelben proportional iſt; ſo folgt daraus: daß wenn man die Länge der logarithmiſchen Krümmung, welche der zu dem Verſuche ge-

wählte Körper annimmt, ſucht, und die größte Ordinate, durch eine Funktion dieſer Länge ausgedrückt, in die Formeln ſubſtituirt, daß alsdann die in den Formeln vorkommende Größe P das größte Gewicht geben muß, welche der beſtimmte Körper zu tragen im Stande iſt.

Nehmen wir z. B. an, daß die Fiber irgend einer Holzart, bey einer Länge = 1, ſich nur um die Größe r ausdehnen kann, ſo iſt dieſe Ausdehnung bey einer Länge f = fr, ſo daß in dem Augenblick des Bruches ihre Länge = f (r + 1) ſeyn wird.

Nimmt man nun die Gleichung

$$\frac{3b}{2f^3}\left(ffx - \frac{x^3}{3}\right) = EKKy,$$

welche der krummen Linie AMH (Fig. 43. Tab. III.) angehört, und ſubſtituirt für EKK ſeinen Werth $\frac{Pf^3}{3b}$, ſo erhält ſie dieſe Form

$$\frac{3b}{2f^3}\left[ffx - \frac{x^3}{3}\right] = y.$$

Wird hieraus der Werth von $f\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ gezogen, und das Integral complett gemacht, indem man

$$f\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = f(r + 1)$$

ſetzt; ſo wird dieſe letzte Gleichung einen Werth für die größte Ordinate der Krümmung b gegeben, wodurch, wenn er in unſere Formeln ſubſtituirt wird, endlich das geſuchte größte Gewicht beſtimmt werden kann.

## §. 328.

Was man in dieſem Fall für Eichen- und Fichtenholz erhält.

Da der Ausdruck $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ für die Krümmung AMH nicht genau integrabel iſt, und übrigens der Bogen dieſer Krümmung mit der Subtangente faſt zuſammen fällt; ſo kann man ſetzen

$$b = (-ff + ff[r + 1]^2) = f\sqrt{(2r + rr)}.$$

Unſere Formeln werden alſo

1ſtens. Für Eichenholz

$$\frac{Pf^2}{3\sqrt{(2r+rr)}} = \frac{(11784451)\ (f+0{,}3)\ ahh}{1{,}3}$$

2tens. Für Fichtenholz

$$\frac{Pf^2}{3\sqrt{(2r+rr)}} = (8161128)\ ahh.$$

Iſt nun r durch eine Reihe von Verſuchen beſtimmt; ſo findet ſich hieraus der Widerſtand des Holzes, ehe es bricht.

§. 329.

Die Zeit erlaubte es uns nicht, hierüber Verſuche anzuſtellen. Dieſen Mangel erſetzen aber die von Buffon angeſtellten, und in den Memoiren der Akademie der Wiſſenſchaften von den Jahren 1738, 1740 und 1741, ſo wie auch in dem 7ten Bande ſeiner Oeuvres beſchriebenen Verſuche. Denn da die größten Ordinaten in dem Augenblick, wo er den erſten Schall hörte (welcher faſt immer die gewiſſe Anzeige des Bruches iſt), bemerkte; ſo läßt ſich hieraus, durch Hülfe der Gleichung $b = f\sqrt{(2r+rr)}$, die größte Verlängerung, welcher die Fibern des Eichenholzes fähig ſind, wenigſtens näherungsweiſe, beſtimmen. Der von den Buffonſchen Verſuchen zu machende Gebrauch.

Vierter Abſchnitt.

## Von den die Biegung begleitenden Umſtänden.

### Von den die Biegung begleitenden Umſtänden, wenn die Körper als vollkommen elaſtiſch angenommen werden; und von den hierauf Bezug habenden Fragen.

§. 330.

Zweck und Nützlichkeit dieſes Abſchnittes.

Das bisher Geſagte bezieht ſich auf den Zuſtand des Gleichgewichtes zwiſchen dem Widerſtande des feſten Körpers und der Gewalt, die ihn zu überwinden trachtet. Aber dieſer Zuſtand hat in dem Augenblick, wo dieſer Widerſtand und dieſe Gewalt zu wirken anfängt, noch nicht Statt. Man bemerkt im Gegentheil, daß das Biegen der feſten Körper immer eine gewiſſe Zeit dauert, wobey die größte Krümmungs-Ordinate den, durch die, die Krümmung hervorbringende Laſt, vertikal durchlaufenen Raum darſtellt. Hieraus läßt ſich alſo ſchließen, daß dieſe Bewegung nach einem gewiſſen Geſetze der Stetigkeit erfolgen muß.

Es ſchien uns daher wichtig, zu beſtimmen, welchen Einfluß die Dauer der Wirkung einer Laſt auf die Vergrößerung der Krümmung der meiſten Körper hatte, weil es in manchen Fällen nützlich iſt, den Grad dieſes Einfluſſes genau zu kennen.

In dieſem Abſchnitte wollen wir von den Verſuchen Rechnung geben, welche wir, um hierzu zu gelangen, angeſtellt haben.

## §. 331.

Der über die feſte Rolle KNV gehende Faden KNVR (F. 58.) ſey unausdehnbar, und an den elaſtiſchen Körder ABCD befeſtiget. Dieſe elaſtiſche Körper ſey in ſeinem natürlichen Zuſtande geradlinigt und in der unbeweglichen Wand HF horizontal befeſtigt. An dem andern Ende R des Fadens ſey ein Gewicht P, welches den Körper nach der krummen Linie AMC biegt. Wir wollen jezt unterſuchen, wie die Bewegung des Endes C des feſten Körpers während der Dauer der Biegung vor ſich geht. Beſchaffenheit der Frage.

Wir ſezen voraus, daß der Theil KS des Fadens immer vertikal bleibe, obgleich zwar die Länge FC, F′C′ immer kleiner und kleiner wird.

Wir wollen nun für die abſolute Elaſticität den bisher gebrauchten Ausdruck EKK beybehalten, und die veränderlichen Entfernungen FC, F′ C′ u. ſ. w. = x, x′, x″ u. ſ. w. (x) ſetzen. Ferner ſey die größte Ordinate der Krümmung FA = y, und die verſchiedenen Krümmungshalbmeſſer für den Punkt A ſeyn = R, R′, R″ ...... (R).

Die Gewichte P, P′, P″ ..... (P), welche, nach einander an C angebracht, bey den verſchiedenen Zuſtänden der Krümmung AMC, A′ M′ C′ u. ſ. w. der elaſtiſchen Kraft in dem Punkte A das Gleichgewicht halten, ſind bekanntlich durch $\frac{EKK}{Rx}$, $\frac{EKK}{R'x'}$ ..... $\frac{EKK}{(R)\,x}$ auszudrücken, und der Faden CNVR iſt während der Biegung des Körpers ABCD eben ſo angeſpannt, als wenn man ſtatt dieſes Körpers in ſeinen verſchiedenen Zuſtänden der Krümmung die Gewichte P, P′, P″ u. ſ. w. ſubſtituirte. Hieraus folgt nun, daß das Gewicht P ſich eben ſo ſenken wird, als wenn es ein veränderliches, an dem andern Ende des Fadens aufgehängtes Gewicht (P) mit ſich fort zöge.

Wenn ein Syſtem von Körpern ſeine Bewegung auf irgend eine Art verändert, und wenn man die Bewegung eines jeden dieſer Körper, die er in dem Augenblick, in welchem er von den übrigen frey würde, haben würde, in zwey andere zerlegt, wovon die eine diejenige iſt, welche er nach der Veränderung wirklich haben wird; ſo weiß man, nach d'Alemberts Princip, daß alsdann die andere ſo ſeyn muß,

daß, wenn alle Körper nur dieſe zweyte Bewegung hätten, das ganze Syſtem im Gleichgewicht bliebe.

Wenn das Gewicht P, welches vermittelſt des Fadens CKNR die Biegung des feſten Körpers hervorbringt, ſo wie auch das Ende C des feſten Körpers, wie wir vorausgeſetzt haben, ſich vertikal, oder nach der Richtung der Schwere, bewegen; ſo muß die veränderliche Kraft, der ſie unterworfen ſind, nach dieſer Richtung meßbar ſeyn. Und da die Geſchwindigkeit eines, ſolchen veränderlichen Kräften unterworfenen, Körpers in einer unendlich kleinen Zeit dieſen Kräften proportional ſeyn muß; ſo folgt daraus, daß die Größen der Bewegung der Körper P′, und $(P) = \frac{EKK}{(R)\,(x)}$, welche auf jedem Ende des Fadens CKNR wirken, für jeden Augenblick den Maſſen der Körper durch beſchleunigende Kraft multiplicirt gleich ſeyn werden.

Wenn der Faden, an deſſen beyden Enden die Gewichte P und (P) hängen, zerriſſe; ſo würde jedes derſelben dem Stoße der Schwere g folgen, und um die Größe GE, CE′ fallen. Weil aber beyde Körper mit einander verbunden ſind, ſo kann der erſtere nur um die Größe GS fallen, während der zweyte um eine gleiche Größe CS′ ſteigt, und dieſe Räume ſind, nach dem bisher Geſagten, für ihre neue beſchleunigende Kraft q zu nehmen.

§. 332.

Ausdruck für die beſchleunigende Kraft, wodurch das Ende des feſten Körpers fortgezogen wird.

Die Geſchwindigkeit GE = g, womit das Gewicht P fallen würde, wenn es frey wäre, ſey zerlegt in die Geſchwindigkeit GS = q, die einzige welche ihm bleibt, und in die Geſchwindigkeit SE = g − q, welche vernichtet iſt.

Dieſelbe Geſchwindigkeit CE′ = g, mit welcher das Gewicht (P) ſich bewegen würde, ſey auch in zwey andere zerlegt, wovon die eine welche bleibt CS′ = −q, und die andere S′E′ = g + q iſt. Nach dem vorſtehenden Princip haben wir alſo

$$P\,(g - q) = (P)\,(g + q).$$

Folglich

$$q = g\left(\frac{P - (P)}{P + (P)}\right).$$

Oder, wenn man für (P) ſeinen Werth $\frac{EEK}{(R)(x)}$ ſubſtituirt,

$$q = g\,\frac{P(R)(x) - EKK}{P(R)(x) + EKK}$$

Um die Frage zu löſen, iſt es nur noch nöthig, die Formeln für die veränderlichen Bewegungen anzuwenden.

## §. 333.

Wenn der Punkt C parallel mit der Vertikal-Linie AF = y ſich bewegt; ſo iſt dieſe Bewegung für die Zeit dt = dy. Nennt man nun die Geſchwindigkeit, womit er dieſen Raum durchlaufen iſt, u; ſo haben wir Allgemeiner Werth der Geſchwindigkeit.

$$g\left(\frac{P(R)(x) - EKK}{P(R)(x) + EKE}\right) dy = u\,du.$$

Um dieſe Gleichung integrabel zu machen, müßten wir für (R) und (x) ihre Werthe durch eine endliche Funktion von y ausdrücken. Nach der Natur der elaſtiſchen Krümmungen kann aber die Größe (x) niemahls in endlichen Gliedern gefunden werden (§. 90.). Eine allgemeine Auflöſung dieſer Aufgaben iſt alſo nicht möglich.

## §. 334.

Die Erfahrung lehrt aber, daß die Entfernung FC des Endes des feſten Körpers von der Vertikal-Linie, welche die Verlängerung der größten Ordinate iſt, bey den erſten Graden der Biegung unverändert, und der anfänglichen Länge gleichbleibt; und da die meiſten Körper nur ſehr unvollkommen biegſam ſind, ſo wollen wir in dem Folgenden die Krümmung des feſten Körpers betrachten, indem wir dabey vorausſetzen, daß ſie ſehr klein ſey. Was entſteht, wenn die Biegung ſehr klein iſt.

Wir haben alſo, indem wir die anfängliche Länge FC = f ſetzen,

$$(P) = \frac{EKK}{(R)\,f} = \frac{3EKKy}{f^3}\ (\text{§. } 197.).$$

Folglich (R) $= \frac{f^2}{3y}$, und die Differential Gleichung für die Geſchwindigkeit des Punktes C wird

$$udu = gdy \left(\frac{Pf^3 - 3EKKy}{Pf^3 + 3EKKy}\right).$$

Integrirt gibt dieß

$$g\left(-a + \frac{2Pf^3}{3EKK}\log.(Pf^3 + 3EKKa)\right) + C = o.$$

Und folglich

$$\frac{u^2}{2} = g\left\{a - y + \frac{2Pf^3}{3EKK}\log.\frac{[Pf^3 - 3EKKy]}{[Pf^3 + 3EKKy]}\right\}.$$

Die Geſchwindigkeit, mit welcher ſich das Ende C des feſten Körpers vertikal bewegt, wird alſo durch die Logarithmen beſtimmt.

§. 335.

*Wenn der Körper am Anfange der Bewegung geradlinigt iſt.*

Nehmen wir den beſondern Fall, daß der feſte Körper in dem Augenblick, wo das Gewicht P darauf wirkſam wird, geradlinigt ſey, ſo haben wir a = o, und dieß gibt

$$u = \pm\sqrt{\left\{2g\left\{-y + \frac{2Pf^2}{3EKK}\log.\left[1 + \frac{3EKKy}{Pf^3}\right]\right\}\right\}}.$$

Setz man nun, um die Formel einfacher zu machen $\frac{EEKy}{Pf^3} = z$, ſo wird

$$u = \pm\sqrt{\left\{2g\frac{Pf^3}{3EKK}(-z + 2\log.[1+z])\right\}}.$$

Hieraus ſieht man, daß für z = c die Geſchwindigkeit u verſchwindet.

## §. 336.

Es muß hierbey aber bemerkt werden, daß z noch einen zweyten Werth haben muß, der u = o macht; denn wenn der feſte Körper eine gewiſſe Krümmung angenommen hat, ſo muß nothwendig zwiſchen der Wirkung des Gewichtes P und der elaſtiſchen Kraft des Körpers ein Gleichgewicht eintreten. Die größte Ordinate für dieſen Zuſtand der Krümmung erhält man durch die Gleichung

Beſtimmung der größten Ordinate, die mit einer Geſchwindigkeit = o correſpondirt.

$$- z + 2 \log. (1 + z) = 0.$$

Subſtituirt man für log. (1 + z)

$$z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + \ldots\ldots$$

ſo wird

$$- \frac{z}{3} + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots = 0;$$

Weil die Glieder dieſer unendlichen Reihe abwechſelnd poſitiv und negativ ſind, ſo ſieht man, daß die Größe z eine unendliche Anzahl von Werthe hat, die alle poſitiv ſind. Bey der gegebenen Frage kann aber nur bey einem einzigen Punkte in der Vertikal-Linie die durch das Gewicht P hervorgebrachte Bewegung verſchwinden. Alle übrigen Werthe von z müſſen alſo imaginär ſeyn.

Strenge genommen iſt die vorſtehende Gleichung, weil ſie von einem ſo hohen Grade iſt, unauflösbar; wenn man aber anſtatt der Reihe

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \ldots\ldots$$

wieder log. (1 + z) ſetzt, ſo kann man vermittelſt der logarithmiſchen Tafeln den geſuchten wirklichen Werth von z durch Näherung finden.

Hierzu müßen in der Gleichung

$$- z + 2 \log. (1 + z) = 0$$

für z die Werthe 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. und die dazwiſchen liegenden Werthe nach einander geſetzt werden.

Die poſitiven Reſultate, welche man nach dieſen Vorausſetzungen erhält, zeigen an, daß die angenommene Zahl zu klein iſt; und die negativen, daß ſie zu groß

iſt. Wenn man alſo nach einander das arithmetiſche Mittel aus denjenigen Zahlen nimmt, die den kleinſten Unterſchied geben, dieſes in die vorſtehende Gleichung ſubſtituirt, und nun auf die obige Weiſe zu rechnen fortfährt; ſo wird man endlich zu einer Zahl (2,512862) gelangen, welche den geſuchten Werth hat. Man bekommt alſo

$$y = \frac{Pf3}{EKK} (2{,}512862).$$

§. 337.

Beſtimmung der größten Ordinate, welche der größten Geſchwindigkeit correſpondirt.

Die Differential-Gleichung

$$udu = gdy \frac{(Pf3 - 3EKKy)}{(Pf3 + 3EKKy)}$$

dient dazu, den Werth von y zu beſtimmen, welchem die größte Geſchwindigkeit correſpondirt, man erhält nähmlich $Pf3 = 3EKKy$ oder $Pf = \frac{EKK}{(R)}$ d. h. die größte Geſchwindigkeit hat Statt, wenn der Widerſtand, mit welchem der Körper der Biegung in dem Punkte A widerſtrebt, der Wirkung des Gewichtes P gleich iſt.

§. 338.

Grenze der Oscillation.

Von dem Anfange der Bewegung an, bis zu dem Punkte, wo die Vertikallinie oder $y = \frac{Pf3}{3EKK}$ wird, iſt die Geſchwindigkeit beſchleunigend. Iſt dieſer Punkt überſchritten, ſo nimmt ſie wieder ab, und wird Null, wenn $y = \frac{Pf3}{3EKK}$ (2,512862) wird. Es iſt klar, daß die Schnellkraft, womit der Körper von dieſem Punkte ſich wieder herzuſtellen ſucht, durch Pf. 2,512862 ausgedrückt und alſo größer als die Gewalt Pf des Gewichtes P iſt. Der Punkt C wird alſo fallen und ſtatt der bisherigen poſitiven Geſchwindigkeit, eine negative annehmen, welche nach demſelben Geſetze veränderlich ſeyn wird, bis die Abſciſſe y verſchwindet. Das Gewicht P wird alsdann anfangen zu fallen, um aufs neue wieder gehoben zu werden, und wenn die Elaſticität des feſten Körpers durch dieſe wiederholten Oscillationen keine Veränderung erlitte, ſo würde es immerfort oscilliren.

## §. 339.

Die Dauer dieſer Oscillationen läßt ſich nicht angeben, denn die Differential-Gleichung

Ihre Dauer läßt ſich nicht genau angeben

$$udt = \pm dt \sqrt{\left\{2g\left[-y + \frac{2Pf^3}{3EKK}\log.\left(1 + \frac{3EKKy}{Pf^3}\right)\right]\right\}} = dy,$$

welche das Verhältniß des Elements der Zeit zu dem Elemente des durchlaufnen Raumes angibt, iſt nicht integrabel, und ſelbſt wenn die Wurzelgröße in einer Reihe aufgelöſet würde; ſo müßte eine ſehr große Anzahl Glieder berechnet werden, um einen hinlänglich genauen Werth für t zu erhalten.

## §. 340.

Wir müſſen uns aber erinnern, daß hier nur von unendlich kleinen Biegungen die Rede iſt, und daß die Rechnung, welche uns den Ausdruck für den Krümmungshalbmeſſer (R) gegeben hat, auf dieſe Hypotheſe gegründet iſt.

Wenn die Biegung ſehr klein iſt, ſo findet keine Oscillation Statt.

Iſt dieſes angenommen, und ſetzt man in die Gleichung

$$u = \pm \sqrt{\left\{2g\left[-y + \frac{2Pf^3}{3EKK}\log.\left(1 + \frac{3EKKy}{Pf^3}\right)\right]\right\}}$$

anſtatt $\log.\left(1 + \frac{3EKKy}{Pf^3}\right)$ den Werth

$$\frac{3EKKy}{Pf^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{3EKKy}{Pf^3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3EKKy}{Pf^3}\right)^3 - \text{u. ſ. w.}$$

Und bemerkt man hierbey, daß die Potenzen von y, welche höher als 2 ſind, außer Acht gelaſſen werden dürfen; ſo hat man

$$u = \pm \sqrt{\left[2g\left(g - \frac{3EKKy^2}{Pf^3}\right)\right]}.$$

Dieſe Gleichung gibt $u = 0$, wenn $y = 0$ und $y = \frac{Pf^3}{3EKK}$, d. h. wenn die Gewalt des Gewichtes P mit der elaſtiſchen Kraft des feſten Körpers im Gleichgewicht iſt. Wenn alſo bey einer unendlich kleinen Biegung keine Oscilla-

tion erfolgt, ſo rührt es daher, daß die Höhe, um welche das Gewicht P in dem Augenblick gefallen iſt, wo ſeine Wirkung dem Widerſtande gleich wird, nicht hinreichend iſt, um vermöge der dabey erhaltenen Geſchwindigkeit daſſelbe noch unter dieſen Punkt fallen zu machen.

§. 341.

Dauer der Biegung nach dieſer Hypotheſe.

Subſtituirt man den für u gefundenen Werth in die Gleichung $u\,dt = dy$, ſo hat man

$$dt = \frac{dy}{\pm\sqrt{\left\{2g\left(y - \frac{3EKKyy}{Pf^3}\right)\right\}}} = \frac{dy}{\pm\sqrt{\left\{2g\,\frac{3EKK}{Pf^3}\left(y\,\frac{Pf^3}{3EKK} - yy\right)\right\}}}$$

Dieß gibt

$$t = \frac{\pm 2.\,3EKK}{Pf^3\sqrt{\left(2g\,\frac{3EKK}{Pf^3}\right)}}\ \text{Arc. ſin.}\sqrt{\left(\frac{Pf^3y}{3EKK} - yy\right)}.$$

Weil y und t zu gleicher Zeit verſchwinden müſſen, ſo iſt keine beſtändige Größe hinzu zu fügen.

§. 342.

Bedenkt man nun, daß am Ende der Biegung die größte Ordinate der Krümmung $= \frac{Pf^3}{3EEK} = b$ iſt; ſo wird

$$t = \pm\frac{2.\,3EKK}{Pf^3\sqrt{(2g.\,3EKK)}}\ \text{Arc. ſin. o.}$$

oder allgemein

$$t = \pm\frac{2m\pi}{b\sqrt{\frac{(2g)}{b}}}.$$

wobey $\frac{1}{\pi}$ das Verhältniß des Durchmeſſers zu dem halben Umfang des Zirkels, und m irgend eine ganze Zahl iſt.

§. 343.

Die Zeit, welche ein ſchwerer Körper beym freyen Fall gebraucht, den Raum b zu durchlaufen, ſey $= \sqrt{\left(\frac{2b}{g}\right)}$. Dieſe Zeit verhält ſich alſo zu der, welche bey einem gleichförmig elaſtiſchen Körper gebraucht wird, um ihn um dieſelbe Größe zu biegen $= b : m\pi$, oder wie die größte Krümmungs-Ordinate zum Umfange multiplicirt mit irgend einer Größe m, welche aber nicht beſtimmt werden kann. Das Verhältniß zwiſchen dieſer größten Ordinate und der Dauer der Biegung ſcheint alſo a priori nicht angeblich zu ſeyn.

Die Dauer der Biegung kann im Allgemeinen nicht angegeben werden.

§. 344.

Wenn man annimmt, daß der feſte Körper ABCD (Fig. 38.) von gleichem Widerſtande ſey; ſo wird der Krümmungshalbmeſſer für alle zwiſchen C und A liegende Punkte unveränderlich, und die Krümmung AMC ein Zirkelbogen ſeyn. Aus der Eigenſchaft dieſer krummen Linie erhalten wir

Unterſuchung über die bey der Biegung Statt habenden Umſtände, wenn die feſten Körper von gleichem Widerſtande ſind.

$$f = 2(R)\,y - yy.$$

Wird hieraus der Werth für (R) gezogen, und in die Gleichung

$$udu = y\left(\frac{P(R)f - EKK}{P(R)f + EKK}\right)dy.$$

ſubſtituirt, ſo hat man

$$udu = g\left(\frac{Pf^3 + Pfyy - 2EKKy}{Pf^3 + Pfyy + 2EKKy}\right)dy = g\left(1 - \frac{4EKKy}{Pf^3 + Pfyy + 2EKKy}\right)dy.$$

Oder, wenn man die Größe $Pf_3 + 2Pfyy + EKKy$ in ihre Faktoren auflöſet

$$udu = gdy\left\{1 - \frac{4EKKy}{Pf\left[y + \frac{EKK}{Pf} + \sqrt{\left(\frac{E^2K^2}{P^2} - ff\right)}\right]\left\{y + \frac{EKK}{Pf} - \sqrt{\left(\frac{E^2K^2}{P^2} - ff\right)}\right\}}\right\}$$

Setzt man der Kürze halber

$$\frac{EKK}{Pf} + \sqrt{\left(\frac{E^2K^2}{P^2} - ff\right)} = A.$$

$$\frac{EKK}{Pf} - \sqrt{\left(\frac{E^2K^2}{P^2} - ff\right)} = B$$

ſo wird die vorſtehende Gleichung

$$udy = gdy \left(\frac{4EKKy}{Pf(A+y)(B+y)}\right)$$

$$= gdy \left[1 - \frac{4EKK}{Pf(A-B)}\left(\frac{A}{A+y} - \frac{B}{B+y}\right)\right].$$

Wird dieſe Gleichung integrirt, ſo erhält man

$$\frac{u^2}{2} = C + g\left(y - \frac{4EKK}{Pf(A-B)}(A.\log. A+y - B.\log. B+y)\right).$$

Die Conſtante C wird durch die Bedingung beſtimmt, daß u und y zu gleicher Zeit Null werden müſſen. Man erhält alſo endlich

$$u = \pm\sqrt{\left[2g\left[y - \frac{4EEK}{Pf(A-B)}\left(A\log.\frac{A+y}{A} - B\log.\frac{B+y}{B}\right)\right]\right]}$$

Wird

$$A\left(y - \frac{y^2}{2A^2} + \frac{y^3}{3A^3} - \text{u. ſ. w.}\right)$$

und

$$B\left(y - \frac{y^2}{2B^2} + \frac{y^3}{3B^3} - \text{u. ſ. w.}\right)$$

für $A \log. \frac{A+y}{A}$ und $B \log. \frac{B+y}{B}$ ſubſtituirt; ſo erhält die Gleichung dieſe einfache Form

$$u = \pm\sqrt{\left[2g\left(y - \frac{2EKKyy}{Pf^3}\right)\right]}.$$

indem die Potenzen von y, welche höher als 2 ſind, vermöge ihrer außerordentlichen Kleinheit außer Acht zu laſſen ſind.

Man ſieht, daß dieſe Geſchwindigkeit $=$ o iſt, wenn $y = o$ und $y = \frac{Pf^3}{2EKK}$ iſt. Das Gleichgewicht zwiſchen dem Gewichte P und der elaſtiſchen Kraft an dem Punkte A des feſten Körpers von gleichem Widerſtande wird alſo Statt haben, wenn die größte Ordinate der Krümmung dieſen letzten Werth erhalten hat.

Für die Dauer der Biegung würden wir einen Ausdruck von derſelben Form wie § 342 finden.

§. 345.

Wenn man anſtatt des elaſtiſchen Körpers A B C D (Fig. 58.) ein, in eine flüſſige Maſſe von gleichem ſpecifiſchen Gewichte, eingeſenktes Prismen betrachtet, und dabey annimmt, daß es in dem erſte Augenblick ganz eingetaucht ſey; ſo wird daſſelbe durch das Gewicht P gerade auf dieſelbe Weiſe in Bewegung geſetzt werden, wie das Ende C des elaſtiſchen Körpers während ſeiner Biegung. Frage, veranlaßt durch §. 333.

Der Körper H I, anſtatt prismatiſch zu ſeyn, kann auch jede andere Form haben. Man kann auch noch annehmen, daß ſein ſpecifiſches Gewicht, zu dem ſpecifiſchen Gewichte der flüſſigen Maſſe, worin er eingetaucht iſt, irgend ein gegebenes Verhältniß habe; ja ſelbſt, welches die Frage allgemeiner macht, daß dieſes Gewicht, für jede horizontale Schichte des feſten Körpers, nach einem gewiſſen Geſetze veränderlich ſey. Dieſe verſchiedenen Hypotheſen würden auf neue Unterſuchungen über die oscillirende Bewegung leiten, die aber dem uns hier vorgeſetzten Zwecke zu fremd ſind, als daß wir uns dabey aufhalten könnten.

§. 346.

Wir haben bisher angenommen, das Gewicht P (Fig. 58.) habe im Anfange ſeiner Wirkung noch keine Geſchwindigkeit; wenn es aber auf den feſten Körper wirkt, indem er von einer gewiſſen Höhe fällt; ſo wird in der Gleichung Ausdruck für die größte Ordinate der Krümmung, wenn das Gewicht, welches ſie hervorbringt, von einer gewiſſen Höhe fällt.

$$u^2 = g\left[-y + \frac{2Pf^3}{3EKK}\log.\left(1 + \frac{2EKKy}{Pf^3}\right)\right]$$

die Conſtante C durch die Bedingung beſtimmt; daß für y = o genommen u = V ſeyn muß. Macht man $V^2 = 2gh$, ſo hat man

$$u = + \sqrt{\left\{ 2g \left[ h - y + \frac{2Pf^3}{3EKK} \log. \left( 1 + \frac{3EKKy}{Pf^3} \right) \right] \right\}}.$$

Nimmt man nun y ſehr klein, ſo kann dieſe Gleichung folgende Form erhalten

$$u = + \sqrt{\left[ 2g \left( h + y - \frac{3EKKyy}{Pf^3} \right) \right]}.$$

Der größte Werth von y hat offenbar Statt, wenn u = o iſt, dieß gibt

$$h + y - \frac{3EKKy^2}{Pf^3} = o.$$

Wenn man annimmt, daß das an das Ende des Körpers angehängte Gewicht P im Stande ſey, ihn um eine beſtimmte Größe b zu biegen; ſo hat man $3EKK = Pf^3$, und die vorſtehende Gleichung verändert ſich in dieſe

$$h + y - \frac{yy}{b} = o.$$

Folglich iſt

$$y = \frac{b}{2} + \sqrt{\left( \frac{b^2}{4} + bh \right)}.$$

Die Wurzelgröße muß hier mit dem poſitiven Zeichen genommen werden. Macht man h = o, ſo iſt y = b, welches mit dem Vorhergehenden übereinkommt.

Da das Gewicht P die Biegung des feſten Körpers hervorbringt, es mag vermittelſt des Fadens, oder unmittelbar durch ſeinen Fall von der Höhe h auf ihn wirken, ſo iſt es klar, daß die Geſchwindigkeit während des Stoßes und die größte Ordinate der Krümmung dieſelben Werthe haben werden, welche wir oben gefunden haben.

Dieſe Werthe bleiben noch dieſelben, wenn man annimmt, der elaſtiſche Körper von einer Doppelten Länge (Fig. 60.) ſey an ſeinen beyden Enden unterſtützt, und empfange in ſeiner Mitte den Stoß eines doppelten Gewichtes P.

Man kann die elaſtiſchen Körper als eine Sammlung von einer Menge kleiner Federn anſehen, die parallel unter ſich auf einander geſetzt, und an mehreren Punkten ihrer Länge unterſtützt ſind. Die elaſtiſchen Elemente der Oberfläche der Körper nehmen, wenn ſie geſtoſſen werden, eine kleine Biegung an, und die größte Ordinate der Krümmung während des Stoßes iſt gerade daſſelbe, was mehrere Phyſiker die Tiefe des Eindrucks genannt haben.

## §. 347.

Könnte man nicht vielleicht die bisher entwickelte Theorie zur Beſtimmung derſelben anwenden? Uebereinſtimmung dieſes Reſultats mit den Verſuchen des's Graveſands und mit der Theorie des Georg Juan.

Wir haben gefunden, daß die größte Ordinate der Krümmung eines feſten Körpers oder einer Feder ABCD (§. 346.) ausgedrückt iſt durch

$$y = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + hb\right)}.$$

Iſt dieſe Feder das Element eines elaſtiſchen, unbeweglichen Körpers, ſo iſt b gegen h unendlich klein, und man erhält $y = \sqrt{(hb)}$.

Wird alſo alles übrige gleich angenommen; ſo iſt die Tiefe des Eindrucks der Quadratwurzel proportional, von welcher der ſtoßende Körper herunter fällt. Dieſes Reſultat ſtimmt mit den Verſuchen des s'Graveſand, ſo wie auch mit Don Georg Juan's Theorie des Stoßes vollkommen über *).

---

*) Setzt man die Tiefe des Eindrucks $= z$; die Ausbreitung des geſtoßenen Körpers $= \sigma$; die Härte $= \varrho$; die Maſſe des ſtoßenden Körpers $= m$; ſeine Geſchwindigkeit im Anfange des Stoßes $= k$; ſo iſt der total Eindruck

$$\int \sigma dz = \frac{m K^2}{4\varrho}.$$

## Geſetze der Compreſſibilität luftartiger Flüſſigkeiten; ihre Anwendung auf das Senken der Gebäude (taſſement) und auf das Biegen unvollkommen elaſtiſcher Körper.

§. 348.

Urſachen des Senkens der Gebäude.

Wir haben geſehen, daß das Verhältniß der größten Ordinate der Krümmung zu der Dauer derſelben für vollkommen elaſtiſche Körper nicht angegeben werden kann (§ 343). Wir hatten dieſe Frage ſchon verlaſſen, als wir, indem wir nun mit Unterſuchungen über das Senken der Bauwerke beſchäftigten, zu einer Formel gelangten, welche auf das Biegen der unvollkommen elaſtiſchen Körper anwendbar iſt.

Das Senken der Bauwerke rührt von zwey Urſachen her, die beyde ganz unabhängig von einander ſind. Die erſte iſt die Compreſſibilität des verſchiedenen Materials, woraus die Bauwerke beſtehen, und die zweyte iſt die Compreſſibilität des Terrains, worauf ſie erbauet ſind.

---

Nimmt man nun an, eine Kugel mit dem Halbmeſſer = a mache auf einen Körper von gegebenen Elaſticität einen Eindruck, deſſen Tiefe = z iſt, und nennt man c den Umfang eines Zirkels, deſſen Halbmeſſer Eins iſt; ſo wird der Werth dieſes Eindrucks, oder das in dem geſtoßnen Körper gebildete ſphäriſche Segment $= z^2 \left(a - \frac{z}{3}\right)$, man hat alſo

$$\int \sigma dz = c z_2 \left(a - \frac{z}{3}\right) = \frac{mKK}{4\varrho}.$$

Iſt nun, wie nach unſrer Hypotheſe, z unendlich klein gegen a, ſo wird die vorſtehende Gleichung

$$c z_2 a = \frac{mKK}{4\varrho}.$$

Folglich

$$z = \sqrt{\left(\frac{mKK}{4.c.a\,\varrho}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2mgh}{4.c.a.\varrho}\right)}$$

Dieſe Tiefe iſt alſo der Quadratwurzel der Fallhöhe proportional. (Prony's neue Architectura Hydraulika S. 228. u. f.)

## §. 349.

Dieſe leztere Compreſſibilität, welche hier blos in Betracht gezogen wird, iſt um ſo bedeutender, je mehr die Erde durch eine, eine gegebene Zeit wirkende, beſtimmte Laſt zuſammen gedrückt wird. Sie iſt alſo im geraden Verhältniſſe der Zuſammendrückung (compreſſion), und im umgekehrten Verhältniſſe der Laſt und der Dauer der Wirkung. Wenn die Laſt unverändert bleibt, ſo hängt die Beſtimmung der Compreſſibilität von der Beſtimmung des Verhältniſſes ab, welches zwiſchen der Größe der Compreſſion und der Zeit, während welcher die Laſt wirkt, exiſtirt. Obgleich dieſes Verhältniß variirt, weil die compreſſible Maſſe ſich deſto weniger zuſammendrücken läßt, je mehr ſie ſchon zuſammengedrückt iſt; ſo ſieht man doch ſo viel ein, daß es in den meiſten Fällen von einem gewiſſen Geſetze der Stetigkeit abhängen, und folglich durch eine analytiſche Formel auszudrücken ſeyn muß. Die Geſetze der Compreſſibilität können durch eine analytiſche Formel ausgedrückt werden.

## §. 350.

Dieſe Formel wird mit den beobachteten Erſcheinungen deſto beſſer übereinſtimmen, je gleichartiger die compreſſible Maſſe iſt, und je weniger die übrigen phyſiſchen Eigenſchaften derſelben ihre Compreſſibilität zu modificiren trachten. Denn die meiſten ſind ſo organiſirt, daß die Wirkungen einer ihrer Eigenſchaften durch die übrigen geſtört werden. Z. B. die abſolute Elaſticität des Holzes erfolgt keinesweges nach dem Geſetze, welches die Theorie, wenn man dabey bloß auf dieſe Elaſticität Rückſicht nimmt, angibt; ſondern in dem natürlichen Zuſtande der Dinge wird ſie durch die longitudinal-Adhäſion der holzartigen Fibern modificirt.

Um das Senken der Bauwerke, in ſo fern es bloß von der Compreſſibilität herrührt, genau zu beſtimmen, muß man anfänglich von allen andern Eigenſchaften der Körper abſtrahiren. Hernach kann man dieſe Eigenſchaften wieder in Anſchlag bringen, um zu unterſuchen, welchen Einfluß ſie auf die erhaltenen Reſultaten haben müſſen.

## §. 351

Wir bemerken hier, daß die Wirkungen, deren Geſetz wir ſuchen, dieſelben ſeyn müſſen, die Körper mögen, nachdem das ſie zuſammendrückende Gewicht weggenommen iſt, ſich in ihren anfänglichen Zuſtand wieder herſtellen, oder nicht. Hieraus folgt, daß man bey den zuſammendrückbaren Körpern auf den Grad ihrer Ela- Sie ſind unabhängig von der Elaſticität der zuſammendrückbaren Körper.

citát nicht zu achten hat. Es kommt bloß darauf an, den Calcul auf ſolche Körper anzuwenden, deren übrigen Eigenſchaften ihre Compreſſibilität ſo wenig wie möglich modiſiciren.

§. 352.

Unterſuchungen über dieſe Geſetze für luftförmige Flüſſigkeiten.

Von allen natürlichen Subſtanzen ſcheinen die luftartigen Flüſſigkeiten die am meiſten zuſammendrückbaren, und diejenigen zu ſeyn, welche durch die Wirkung einer gewiſſen Gewalt in den kleinſten Raum gebracht werden können, ohne daß hierbey eine andere ihrer Eigenſchaften hinderlich würde, denn ihre außerordentlich beweglichen Elementar-Theilchen haben nur eine unendlich kleine Adhäſion zu einander, vermöge welcher ſie der Zuſammendrückung vorzüglich widerſtehen.

Es ſcheint alſo räthlich zu ſeyn, zuerſt das Einſinken in eine, mit einem beſtimmten Gewichte beſchwerte, elaſtiſche Flüſſigkeit zu unterſuchen, um hiervon, mit den nöthigen Abänderungen, die Anwendung auf feſte zuſammendrückbare Körper zu machen. Dieſes Verfahren wird den Vortheil haben, daß ſie uns zugleich die Auflöſung derjenigen Frage gibt, welche wir Anfangs vorzüglich beabſichtigten.

Wir nehmen an, eine elaſtiſche Flüſſigkeit ſey in ein Gefäß eingeſchloſſen, das nach allen Seiten luftdicht iſt, und oben einen Stempel hat, der beweglich iſt, ohne an den vertikalen Seitenwänden des Gefäßes Reibung zu verurſachen.

Wird dieſer Stempel mit einem Gewichte beſchwert, das im Stande iſt, die elaſtiſche Kraft der in dem Gefäße eingeſchloſſenen Flüſſigke. zu überwinden, ſo wird das Gewicht ſo lange hinunter ſinken, bis es mit der zuſammengedrückten Flüſſigkeit im Gleichgewichte iſt. Dieſes iſt es, was wir hier unterſuchen wollen.

Es ſey: die anfängliche Höhe der in dem Gefäße enthaltenenen Flüſſigkeit $= a$; das Gewicht, womit der Stempel belaſtet iſt, $= M$; die beſchleunigende Kraft deſſelben während ſeiner Bewegung $= q$; ſeine Geſchwindigkeit $= u$; der durchlaufene Raum $= s$; die hierzu gebrauchte Zeit $= t$; und endlich die allgemeine Schwere $= g$.

§. 353.

Es iſt klar, daß die Elaſticität der Flüſſigkeit für jeden Augenblick durch ein gewiſſes Gewicht Q, welches im Stande iſt, derſelben das Gleichgewicht zu halten, dargeſtellt werden kann. Dieſes Gewicht iſt, wie die Erfahrung gezeigt hat, der Dichtigkeit der flüſſigen Maſſe proportional, oder es iſt im umgekehrten Verhältniſſe des Raumes, den ſie einnimmt. Nimmt man nun an, für den erſten Augenblick der Bewegung ſey es $= P$; ſo hat man $Q = \frac{aP}{a - s}$, und nach dem allgemeinen dynamiſchen Princip

Formel für die Bewegung eines durch dieſe Flüſſigkeit unterſtützten, und mit einem gewiſſen Gewichte beſchwerten Stempels.

$$M(g - q) = Q(g + q).$$

Folglich iſt

$$q = g\left(\frac{M - Q}{M + Q}\right).$$

Man erhält alſo anfänglich die Gleichung

$$udu = \left(\frac{M - Q}{M + Q}\right) gds = \left(\frac{(a-s)M - aP}{(a-s)M + aP}\right) gds.$$

Das Integral hiervon iſt

$$\frac{u^2}{2} = gs + \frac{2aPg}{M} \log. ([a - s]M + aP) + C.$$

Weil u und s zugleicher Zeit Null werden müſſen, ſo iſt

$$C = -\frac{2aPg}{M} \log. (aM + aP).$$

Und endlich alſo

$$u = \pm \sqrt{\left\{2gs + \frac{4aPg}{M} \log. \left(\frac{(a-s)M + aP}{aM + aP}\right)\right\}}.$$

Das doppelte Zeichen zeigt an, daß u abwechſelnd poſitiv und negativ iſt, oder daß das Gewicht M, nachdem es um eine gewiſſe Größe gefallen iſt, von neuem

wieder zu derſelben Höhe ſteigt, und hierbey dieſelben Grade der Geſchwindigkeit wieder erhält. Die Grenze des durchlaufenen Raumes wird beſtimmt, wenn man $u = 0$ ſetzt, oder wenn man den Werth von s ſucht, wozu dieſe Gleichung dient

$$s = \frac{2aP}{M} \log. \frac{aM + aP}{(a - s)M + aP}$$

welche nur durch Näherung aufzulöſen iſt.

Die Dauer einer Oſcillation würde man erhalten, wenn folgende Gleichung integrirt würde

$$dt = \frac{ds}{\pm \sqrt{\left\{2gs \pm \frac{4aPg}{M} \log. \left(\frac{(a-s)M + aP}{aM \pm aP}\right)\right\}}}$$

Hierzu müßte das zweyte Glied dieſer Gleichung durch einen ſehr verwickelten Calcul in eine Reihe aufgelöſet werden.

§. 354.

Für den Fall wo das Gleichgewicht zwiſchen dieſem Gewicht und der Expanſivkraft der Flüſſigkeit eintritt.

Wenn aber der durchlaufene Raum gegen a ſehr klein iſt, welches alsdann Statt hat, wenn das Gewicht M nur ſehr wenig von P verſchieden iſt; ſo wird aus der Formel

$$u = \pm \sqrt{\left\{2g\left[s + \frac{2aP}{M} \log. \left(1 - \frac{Ms}{aM + aP}\right)\right]\right\}}$$

wenn für $\log. \left(1 - \frac{Ms}{aM + aP}\right)$ der Werth

$$-\left(\frac{Ms}{aM + aP} + \frac{M^2 s^2}{2(aM + aP)^2} + \frac{M^3 s^3}{3(aM + aP)^3} + \text{u. ſ. w.}\right)$$

geſetzt, und dabey die Potenzen von s, die höher als 2 ſind, außer Acht gelaſſen werden, folgende:

$$u = + \sqrt{\left\{\frac{2g}{a}\left(\frac{PM}{[P + M]^2}\right)\left(\frac{[M^2 - P^2]as}{PM} - ss\right)\right\}}$$

Hieraus erhält man für den Punkt, wo die Geſchwindigkeit Null iſt

$$\frac{(M^2 - P^2)\, a s}{PM} - ss = o,$$

dieß gibt $s = o$, und $s = \frac{(M^2 - P^2)\, a}{PM}$.

Für das Verhältniß der Zeit und des Raumes hat man

$$dt = -\frac{ds}{\pm\sqrt{\left\{2g\left[\frac{PM}{(P+M)^2}\right]\left[\frac{(M^2 - P^2)\, as}{PM} - ss\right]\right\}}}$$

Das Integral iſt

$$t = \pm\sqrt{\left(\frac{a(M \pm P)^2}{2gPM}\right)}\left\{\text{Arc. ſin.}\left(1 - \frac{2PMs}{a(M^2 - P^2)}\right) \pm C\right\}.$$

Die Bedingung, daß s und t zugleich verſchwinden, gibt, wenn man für den halben Umfang, deſſen Durchmeſſer Eins iſt, $\pi$ ſetzt,

$$G = \pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{a(M + P)^2}{2gPM}\right)},$$

und folglich

$$t = \sqrt{\left(\frac{a(M\ P)^2}{2gPM}\right)}\left[\pm\frac{\pi}{2} \mp \text{Arc. ſin.}\left(1 - \frac{2PMs}{a(M^2 - P^2)}\right)\right]$$

woraus man für t zwey gleiche Werthe erhält, nachdem man die obern oder die untern Zeichen in dem zweyten Gliede nimmt.

## §. 355.

Die vorſtehende Gleichung zeigt, daß die Weite und Dauer der Oscillationen, welche durch die elaſtiſche Kraft einer, dem Druck eines gewiſſen Gewichtes ausgeſetzten, Flüſſigket erzeugt werden, ganz genau beſtimmt werden können; ſie zeigt aber auch zugleich, daß dieſe Weite und Dauer der Schwingungen unendlich klein ſind, wenn das die elaſtiſche Flüſſigkeit drückende Gewicht nur unendlich wenig von

In welchem Falle die Weite und Dauer der Schwingungen ſehr klein ſind.

denjenigen verſchieden iſt, welches im Stande iſt, der Elaſticität in dem erſten Augenblick der Bewegung das Gleichgewicht zu halten.

§. 355.

*Der Widerſtand gegen die Zuſammendrückung iſt eine Funktion der Zeit, während welcher die meiſten Körper zuſammen gedrückt werden.*

Da die luftartigen Flüſſigkeiten die einzigen Subſtanzen zu ſeyn ſcheinen, welche eine vollkommenene Compreſſibilität und Elaſticität beſitzen; ſo ſind ſie auch die einzigen, für welche der vorſtehende Calcul gilt, indem die Erfahrung gezeigt hat, daß die meiſten Körper ſehr lange fortfahren, ſich unter einer Laſt zu ſenken, welche in dem erſten Augenblick ihrer Wirkſamkeit ſie nur um eine Größe biegen konnte, die von ihrer ſpecifiſchen Compreſſibilität abhängig, und nach der eben entwickelten Methode angeblich iſt. Es folgt hieraus, daß die Elaſticität der unvollkommen elaſtiſchen Körper, oder allgemeiner, daß die Kraft, mit welcher die meiſten feſten Körper ihrer Zuſammendrückung widerſtehen, durch die fortdaurende Wirkung der ſie drückenden Laſt verändert wird. Dieſer Widerſtand iſt alſo eine Funktion der Zeit, während welcher die Laſt zu wirken fortdauert.

§. 357.

*Ein beſonderer Werth für dieſe Funktion.*

Man kann z. B. annehmen, daß das Gefäß, in welchem wir uns die luftartige Flüſſigkeit eingeſchloſſen gedacht haben, von einem Mittel umgeben ſey, deſſen Temperatur kleiner und kleiner werde, und daß dieſe Abnahme ſo ſey, daß die Flüſſigkeit in jedem Augenblicke einen beſtimmten Theil der ihr gebliebenen Expanſiv-Kraft verliehre.

§. 358.

Es ſey: die Elaſticität für den erſten Augenblick $= P$; der Theil, welchen die Kraft in jedem Augenblick verliehrt $= \frac{1}{n}$; ſo iſt die Elaſticität nach dem erſten Augenblicke

$$P - \frac{P}{n} = P \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

nach dem zweyten

$$P \left(\frac{n-1}{n}\right) - P \left(\frac{n-1}{n^2}\right) = P \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Allgemein iſt ſie alſo nach der Zeit t ausgedrückt durch $P \left(\frac{n-1}{n}\right)^t$.

§. 359.

Setzt man alſo in die allgemeine Formel (§. 353.) für Q den vorſtehenden Ausdruck der Elaſticität, und P für M; ſo erhält man

Geſchwindigkeit des Gewichtes, wenn es nach dieſer Hypotheſe zuſammendrückt.

$$u\,du = \left[\frac{P - P\left(\frac{n-1}{n}\right)^t}{P + P\left(\frac{n-1}{n}\right)^t}\right] g\,ds.$$

Oder, weil $ds = u\,dt$ iſt,

$$du = \left[\frac{n^t - (n-1)^t}{n^t + (n-1)^t}\right] g\,dt.$$

Um das zweyte Glied integriren zu können, nehme man die angedeutete Diviſion wirklich vor, und es wird

$$\left[\frac{n^t - (n-1)^t}{n^t + (n-1)^t}\right] g\,dt.$$

$$g\,dt\left[1 - 2\left[\left(\frac{n-1}{n}\right) - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2t} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3t} - \text{u. ſ. w.}\right]\right]$$

Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{n-1}{n} = N$; ſo wird vorſtehender Ausdruck in dieſen verwandelt

$$g\,dt\left[1 - 2\left(N^t - N^{2t} + N^{3t} - N^{4t} + \text{u. ſ. w.}\right)\right]$$

Weil nun

$$\int N^{nt}\,dt = \frac{\log. N^n}{N^{nt}}$$

iſt, ſo wird das Integral

$$g\left[t - \frac{2}{\log. N}\left(\frac{N^t}{1} - \frac{N^{2t}}{2} + \frac{N^{3t}}{3} - \frac{N^{4t}}{4} + \text{u. ſ. w.}\right)\right]$$

$$= g\left(t - \frac{2}{\log. N}\log. (1 + N^t)\right).$$

Man hat alſo

$$u = C + g\left(t - \frac{2}{\log. N}\log.(1 + N^t)\right),$$

und endlich, weil t und u zugleich verſchwinden müſſen,

$$u = g\left[t - \frac{2}{\log. N}\log.\left(\frac{1 + N^t}{2}\right)\right].$$

## §. 360.

Sie iſt beſtändig poſitiv.

Man erſieht hieraus, daß nach dieſer Hypotheſe die Geſchwindigkeit u beſtändig poſitiv iſt, und wenn man bedenkt, daß die Elaſticität in jedem Augenblick kleiner wird; ſo begreift man auch leicht, daß keine Oscillation erfolgen kann.

## §. 361.

Verhältniß der Zeit zum Raume.

Wird die Formel

$$u\,dt = g\left(t\,dt + \frac{2\,dt}{\log. N}\log.\frac{2}{1 + N^t}\right) = ds$$

integrirt; ſo erhält man das geſuchte Verhältniß.

Hierzu werde für log. $(1 + N^t)$ der Werth

$$N^t - \frac{N^{2t}}{2} + \frac{N^{3t}}{3} - \frac{N^{4t}}{4} + \text{u. ſ. w.}$$

geſetzt, ſo wird die vorſtehende Gleichung

$$g\left[t\,dt + \frac{2\,dt}{\log. N}\log. 2 - \frac{2\,dt}{\log. N}\left(N^t - \frac{N^{2t}}{2} + \frac{N^{3t}}{3} - \frac{N^{4t}}{4}\ \text{u. ſ. w.}\right)\right] = ds.$$

Oder

$$\int\frac{2\,dt}{\log. N}\left(N^t - \frac{N^{2t}}{2} + \frac{N^{3t}}{3} - \text{u. ſ. w.}\right) =$$

$$\frac{2}{(\log. N)^2}\left(\frac{N^t}{1} - \frac{N^{2t}}{4} + \frac{N^{3t}}{9} - \frac{N^{4t}}{16} + \text{u. ſ. w.}\right).$$

Man hat alſo

$$s = C + \frac{gt^2}{2} + \frac{2t\log.2}{\log.N} - \frac{2}{(\log.N)^2}\left(N^t - \frac{N^{2t}}{2.2} + \frac{N^{3t}}{3.3} - \frac{N^{4t}}{4.4}\ \text{u. ſ. w.}\right)$$

Und da für $s = 0$ auch $t = 0$ ſeyn muß, ſo findet man

$$s = \frac{gt^2}{2} + \frac{2}{\log.N}\left\{t.\log 2 - \frac{1}{\log.N}\left(N^t - \frac{N^{2t}}{2.2} + \frac{N^{3t}}{3.3} - \text{u. ſ. w.} + 1 - \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} - \text{u. ſ. w.}\right)\right\}$$

Iſt $\pi$ der halbe Umfang eines Zirkels, deſſen Halbmeſſer = 1 iſt, ſo erhält man nach Eulers Formeln *)

$$1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{7.7}\ \text{u. ſ. w.} = \frac{\pi\pi}{8}.$$

$$\frac{1}{2.2} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{8.8} + \text{u. ſ. w.} = \frac{\pi\pi}{27}.$$

und folglich

$$s = \frac{gt^2}{2} + \frac{2}{\log.N}\left\{t\log.2 - \frac{1}{\log.N}\left[N^t - \frac{N^{2t}}{2.2} + \frac{N^{3t}}{3.3} - \text{u. ſ. w.} + \pi\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{27}\right)\right]\right\}.$$

welcher Ausdruck keine einfachere Form erhalten kann, weil die Reihe

$$N^t - \frac{N^{2t}}{2.2} + \frac{N^{3t}}{3.3} - \frac{N^{4t}}{4.4} \ldots\ldots + \frac{N^{nt}}{n.n}$$

nicht ſummirt werden kann.

*) Introductio in analyſin infinitorum, tom. 2. pag. 137.

§. 362.

Was aus dieſen Formeln wird, wenn man auf die Zunahme der Dichtigkeit der zuſammen gedrückten Flüſſigkeit mit achtet.

Wir haben bisher angenommen, daß die luftartige Flüſſigkeit, indem ſie durch irgend eine Urſache in jedem Augenblick einen beſtimmten Theil der ihr gebliebenen Expanſiv-Kraft verliehrt, durch ein Gewicht zuſammen gedrückt werde. Aber indem ſie zuſammengedrückt wird, erhält ſie eine größe Dichtigkeit, wodurch ſie folglich der Zuſammendrückung wiederum ſtärker widerſteht. Ein Theil der verlohrnen Elaſticität wird folglich durch dieſe größe Dichtigkeit wieder erſetzt. Die beſchleunigende, oder verzögernde Kraft der Laſt iſt ſonach nicht bloß eine Funktion von der Dauer ihrer Wirkſamkeit, ſondern auch von dem durchlaufenen Raume.

Um dieſe Funktion zu beſtimmen, bemerken wir, daß die Elaſticität, wenn ſie durch gar nichts vermindert würde, nach Verlauf irgend einer Zeit $= \frac{aP}{a-s}$ (§ 353) ſeyn müßte. Wenn aber der augenblickliche Verluſt $\frac{1}{n}$ dieſer Kraft iſt; ſo wird ſie in dem erſten Augenblick nach demjenigen, wo ſie $\frac{aP}{a-s}$ war, ſeyn

$$\frac{aP}{a-s} - \frac{1}{n}.\frac{aP}{a-s} = \frac{aP}{-s}\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Und nach der Zeit t allgemein

$$\frac{aP}{a-s}\left(\frac{n-1}{n}\right)^t.$$

Man hat alſo die Formel

$$du = \left[\frac{M - \frac{aP}{a-s}\left(\frac{n-1}{n}\right)^t}{M + \frac{aP}{a-s}\left(\frac{n-1}{n}\right)^t}\right] g\,dt.$$

Und für p u der Werth $\frac{dds}{dt}$ gibt

$$\frac{dds}{dt} = \left\{ \frac{M \frac{(a-s)}{a} - P \left(\frac{n-1}{n}\right)^t}{M \frac{(a-s)}{a} + P \left(\frac{n-1}{n}\right)^t} \right\} g\,dt.$$

Wäre dieſe Gleichung auf eine ſchickliche Art zu integriren, ſo würde ſie das endliche Verhältniß zwiſchen der Dauer und der Größe der Zuſammendrückung geben.

## §. 363.

Obgleich dieſe Formel nicht integrabel zu ſeyn ſcheint, ſo kann man das geſuchte Verhältniß doch für den Fall beſtimmen, wenn die Geſchwindigkeit ein Größtes oder Kleinſtes iſt, denn für dieſen Fall hat man *Verhältniß der Größe und Dauer der Zuſammendrükkung wenn die Geſchwindigkeit ein Maximum iſt.*

$$M \left(\frac{a-s}{a}\right) - P \left(\frac{n-1}{n}\right)^t = 0.$$

Und wenn man M = P macht, welches Statt hat, wenn am Anfange der Bewegung zwiſchen der Laſt und der Expanſiv-Kraft der Flüſſigkeit das Gleichgewicht iſt; ſo erhält man

$$\frac{a-s}{a} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^t.$$

Und folglich iſt

$$t = \frac{\log. \frac{a-s}{a}}{\log. \frac{n-1}{a}}$$

## §. 364.

Wenn die Größe u ſehr groß iſt, ſo iſt die Geſchwindigkeit u ſo klein, daß das Gleichgewicht zwiſchen der Laſt und dem Widerſtande der Flüſſigkeit für jeden *Was erfolgen muß, wenn n ſehr groß iſt.*

Augenblick nahe bey Statt hat. Die vorſtehende Gleichung, die für den Fall gilt, wo die Geſchwindigkeit Null iſt, ſtellt alſo das Verhältniß der Zeit und des Raumes mit einer hinlänglichen Genauigkeit dar.

## §. 365.

Dieſe Größe kann eine Funktion von s oder t ſeyn. Formeln welche daraus entſtehen.

Nimmt man für n einen unveränderlichen Werth, ſo haben wir das allereinfachſte angenommen. Sie kann indeß auch veränderlich, und eine Funktion von t oder s ſeyn, ſo daß man hat

$$\frac{a-a}{a} = \left(\frac{F.t - 1}{F.t}\right)$$

$$\frac{a-s}{a} = \left(\frac{F'.s - 1}{P'.s}\right).$$

Nun kann man annehmen

$$F.t = A + B.t + C.t^2 + D.t^3 + \text{u. ſ. w.}$$

$$F'.s = A' + B's + C's^2 + D's^3 + \text{u. ſ. w.}$$

Wodurch die vorſtehenden Gleichungen dieſe Formen erhalten

$$\frac{a-s}{a} = \left(\frac{A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \text{u. ſ. w.} - 1}{A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \text{u. ſ. w.}}\right)^t,$$

$$\frac{a-s}{a} = \left(\frac{A' + B's + C's^2 + D's^3 + \text{u. ſ. w.} - 1}{A' + B's + C's^2 + D's^3 + \text{u. ſ. w.}}\right)^t.$$

Oder weil die Größe n zu gleicher Zeit eine Funktion von t und von s ſeyn kann

$$\frac{a-s}{a} = \left(\frac{A'' + B''t + C''t^2 + \text{u. ſ. w.} + B'''s + C'''s^2 + \text{u. ſ. w.} + B^{IV}st\ \text{u. ſ. w.} - 1}{A'' + B''t + C''t^2 + \text{u. ſ. w.} + B'''s + C'''s^2 + \text{u. ſ. w.} + B^{IV}st + \text{u. ſ. w.}}\right)$$

## §. 366.

Wie die beſtändigen Coefficienten in dieſer Funktion beſtimmt werden.

Die Coefficienten A, B, C u. ſ. w. A'', B'', C'' u. ſ. w. können nur durch eine gleiche Anzahl von Beobachtungen beſtimmt werden, und da ihre Werthe offen-

bar von der Natur und den beſonderen Eigenſchaften der zuſammendrückbaren Subſtanzen abhängt, ſo folgt daraus, daß unſere Formeln zu den Unterſuchungen über das Senken der Gebäude, wie wir es § 348 beſtimmt haben, anzuwenden ſind, wenn nur die Coefficienten derſelben, durch zuvor angeſtellte Verſuche gehörig beſtimmt ſind.

## §. 367.

Uns fehlen die nöthigen Beobachtungen, um unſere Formeln auf beſondere Fälle anwenden zu können. Hierzu würden Unterſuchungen erforderlich geweſen ſeyn, die unſerm abzuhandelnden Gegenſtand ganz fremd ſind. Wir bemerken hier nur noch, daß in der Suppoſition, wo die Größe des jeden Augenblick verlohrnen Widerſtandes eine Funktion der Dauer der Zuſammendrückung iſt, dieſe Dauer nicht genau angegeben werden kann; wenn aber der Verluſt des Widerſtandes bloß eine Funktion des durchlaufenen Raumes iſt; ſo kann die eine von den Größen t oder s leicht durch die andere beſtimmt werden. Dieſe Hypotheſe haben wir angenommen, um unſere Formeln auf die Biegung der unvollkommen elaſtiſchen Körper anzuwenden.

Anwendung auf das Biegen unvollkommen elaſtiſcher Körper.

Die abſolute Elaſticität eines feſten Körpers in dem erſten Augenblick, wo die Laſt auf demſelben wirkt, ſey EKK; wenn aber dieſe Laſt eine Zeit t ſeine Wirkung geäußert hat, ſo ſey ſie E′K′K′; weil nun die größte Ordinate der Krümmung y immer größer wird, ſo hat man (§ 362.)

$$\left\{\frac{E'K'K' - EKK\left(\frac{n-1}{n}\right)^t}{E'K'K' + EKK\left(\frac{n-1}{n}\right)^t}\right\} gdt = du.$$

Oder, da die Geſchwindigkeit u unendlich klein iſt,

$$E'K'K' - EKK\left(\frac{n-1}{n}\right)^t = 0.$$

Setzt man nun für E′K′E′ und EKK die Werthe $\frac{Pf^3}{3y}$ und $\frac{Pf^3}{3b}$ und

$$n = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{u. ſ. w.}$$

So wird obige Gleichung

$$b = y \frac{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{u. ſ. w.} - 1)t}{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{u. ſ. w.})}.$$

Woraus man alſo ein gewiſſes Verhältniß zwiſchen der größten Ordinate der Krümmung und der Dauer der Wirkſamkeit der Laſt erhält.

§. 358.

Die beyden erſten Coefficienten durch einen Calcul aus Buffons und unſern Verſuchen abgeleitet.

Um die Coefficienten A, B, C, u. ſ. w. zu beſtimmen, hätte die Zunahme der größten Ordinaten bey ein und derſelben Laſt in einer Zeit von mehreren Monaten beobachtet werden müſſen, wozu es uns aber bisher an Zeit gefehlt hat. Werden indeß unſere Verſuche mit den Verſuchen von Buffon combinirt; ſo kann man die beyden erſten Coefficienten A und B angeben, welches für die Praxis vielleicht hinreichend ſeyn möchte. Zur Erleichterung dieſer Unterſuchung dienen die 10. und 11. Tabelle.

## Zehnte Tabelle.

§. 369.

Einrichtung der zehnten Tabelle.

Die erſte Colonne dieſer Tabelle zeigt die in dem erſten Augenblick beobachtete Elaſticität. Die zweyte die Elaſticität nach Verlauf einer gewiſſen Zeit, welche Zeit in der dritten Colonne in Decimal-Minuten angegeben iſt.

In der 4ten Colonne ſind die Werthe von $A + By + Cy^2 + Dy^3 +$ u. ſ. w. angegeben, wie ſie aus zwey nach einander folgenden Beobachtungen, welche bey ein und demſelben Stücke und ein und derſelben Laſt angeſtellt wurden, abgeleitet ſind.

Die fünfte Colonne gibt endlich den mittlern Werth dieſer Größe für jedes Stück.

§. 370.

Der mittlere Werth für alle Verſuche iſt die Zahl 12730. Ferner findet man, daß die Zeit zwiſchen den beyden Beobachtungen, welche EKK und E′K′K′

geben, ungefähr 800 Minuten iſt. Unſere Beobachtungen geben alſo zu erkennen, daß im Anfange der Biegung die abſolute Elaſticität des Eichenholzes ungefähr $\frac{1}{12730}$ kleiner wird, wenn man die Minute für die Einheit der Zeit nimmt.

## Eilfte Tabelle.

### §. 371.

Diese Tabelle enthält die Reſultate der von Büffon angeſtellten Verſuche, die aber nach dem neuen Maße reducirt ſind. Wir haben ſchon oben (§ 329) geſehen, daß er die größten Ordinaten der Krümmung der feſten Körper in dem Augenblick beobachtete, wo er den Knall hörte. In den Memoiren der Akademie der Wiſſenſchaften v. J. 1741 hat er ferner dieſe größten Ordinaten für den Augenblick des Bruches angegeben. Dieſe haben wir in der 9ten Colonne unſerer Tabelle verzeichnet. Vermittelſt der Formel  Object der 11. Tabelle.

$$b = \sqrt{(ff[r+1]^2 - ff)} \quad (\S\ 328.)$$

haben wir nun die größte Verlängerung r berechnet, welche eine Fiber von Eichenholz auf die Länge eines Metre's erhalten kann. Die mittlere dieſer Verlängerungen aus allen Büffonſchen Beobachtungen iſt 0,0074452, welche Zahl auf 0,007 reducirt werden kann, indem das zu den Verſuchen gewählte Holz noch grün war, deſſen Biegſamkeit alſo größer ſeyn muß, als bey einem Holze, wie es gewöhnlich zu den Bauwerken gebraucht wird, das ſchon eine Zeitlang gefällt iſt.

### §. 355.

Außer den in dieſer Tabelle enthaltenen Verſuchen hat Büffon noch einige andere angeſtellt, welche über die Contextur und Organiſation der holzartigen Fibern vielen Aufſchluß geben; der merkwürdigſte Verſuch in der hier angegebenen Rückſicht iſt aber derjenige, welchen er anſtellte, um den Einfluß der Laſt auf den Widerſtand kennen zu lernen.  Büffons Verſuch über die Dauer der Biegung bis zum Bruche.

Er nahm zu dieſem Ende zwey Stücke Eichenholz 6,8452$^m$ lang und 0,1884$^m$ ſtarck; beyde beſchwerte er in der Mitte mit 2834,876 Kilogram, welcher Laſt ſie 186 Tage lang widerſtanden *).

§. 373.

Anwendung unſerer Theorie auf dieſen Verſuch.

Um unſere Formel auf dieſe Erfahrung anzuwenden, ſey, wie oben, die größte Ordinate der Krümmung im erſten Moment = b.

Die größte Ordinate der Krümmung 800 Minuten, oder 8 Stunden nach dem Anfange der Belaſtung = y.

Endlich ſey dieſe Ordinate in dem Augenblick des Bruches = y′ = f √(2r + rr) (§ 329).

Wir haben alſo, wenn wir die Minute zur Einheit der Zeit nehmen (§. 368 und 369.)

1ſtens ... $b = y \frac{(A + By - 1)^{800}}{(A + By)}$

2tens ... $b = y' \frac{(A + By' - 1)^{18600}}{(A + By')}$

Durch dieſe beyden Gleichungen kann man die Coefficienten A und B beſtimmen, wenn die Werthe für b, y und y′ in Zahlen ausgedrückt werden, die leicht zu finden ſind (§ 197, 320, 334, 370 und 371).

Der angezeigte Calcul kann hier, wegen der kleinen Zahl von Beobachtungen, worauf er gegründet iſt, nur bloß zum Beyſpiele dienen, und deswegen halten wir uns nicht dabey auf, ihn wirklich vorzunehmen.

---

*) Memoires des l'academie des Sciences, an 1740.

§. 374.

Verſuche und Erfahrung geben, bey der Unterſuchung über die Geſetze gewiſſer Phänomene, ſich gegenſeitig Licht und Hülfe. Indeß kann man es nicht läugnen, welche außerordentliche Schwierigkeiten es hat, dieſe Geſetze mit einer hinlänglichen Genauigkeit anzugeben, um ſie für alle Fälle gebrauchen zu können. Wenn der Calcul auf die Phyſik, und vorzüglich auf ſolche Fragen angewandt werden ſoll, welche ſo genau mit der Organiſation der Körper zuſammen hangen; ſo muß man ſich damit begnügen, der Wahrheit nur näher zu kommen, ohne zu hoffen, ſie wirklich zu erreichen. Da nun ſorgfältige Beobachtung ein Schritt näher zu derſelben iſt, ſo muß man hierzu keine Gelegenheit vorbey gehen laſſen. Ob nun gleich die vorne beſchriebenen Verſuche in einer Zeit von mehreren Jahren mit aller möglichen Genauigkeit, welche ſie uns zu erfordern ſchienen, angeſtellt ſind; ſo wird es doch immer noch nützlich ſeyn, ſie zu wiederholen, oder auch neue Verſuche anzuſtellen; eine Arbeit, welche vorzüglich den unterrichteten, und für die Fortſchritte ihrer Kunſt beſelten Ingenieurs aufbehalten zu ſeyn ſcheint. Schluß.

Schleuſingen,

gedruckt bey Carl Gottlob Hoffmann.

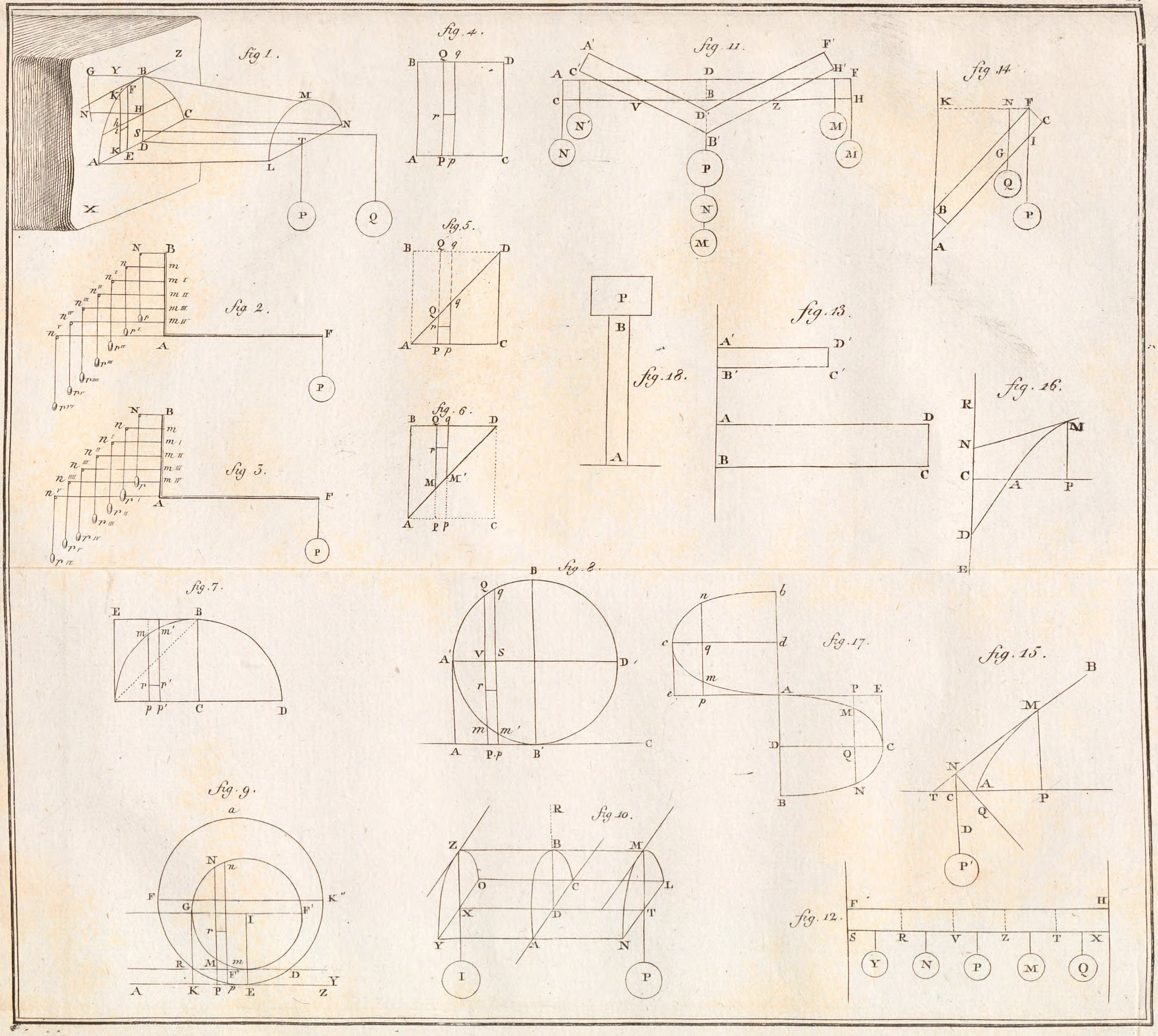


fig. 1.
fig. 4.
fig. 11.
fig. 14.
fig. 2.
fig. 5.
fig. 13.
fig. 18.
fig. 3.
fig. 6.
fig. 16.
fig. 7.
fig. 8.
fig. 17.
fig. 15.
fig. 9.
fig. 10.
fig. 12.

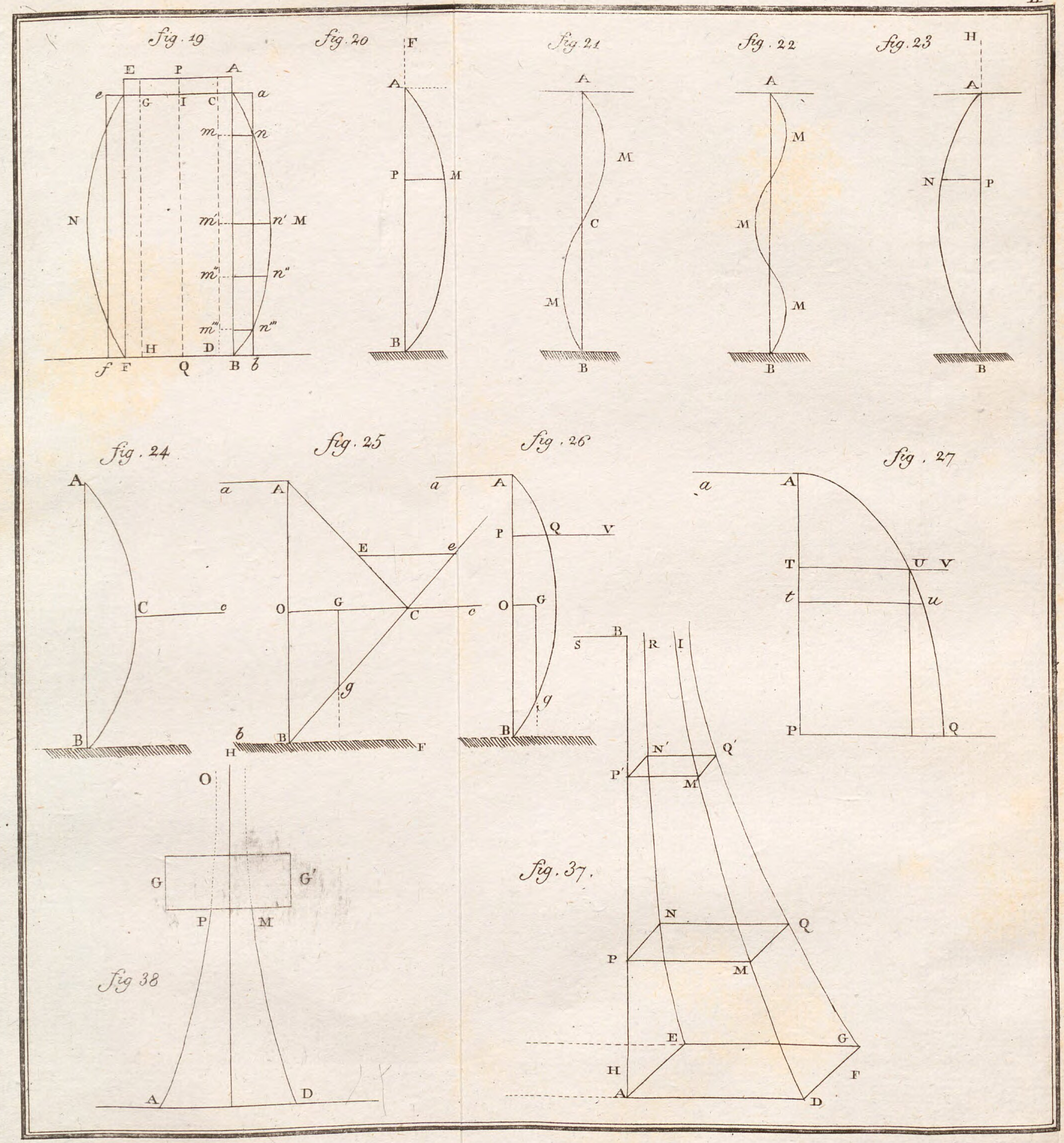


fig. 19
fig. 20
fig. 21
fig. 22
fig. 23
fig. 24
fig. 25
fig. 26
fig. 27
fig. 37.
fig 38

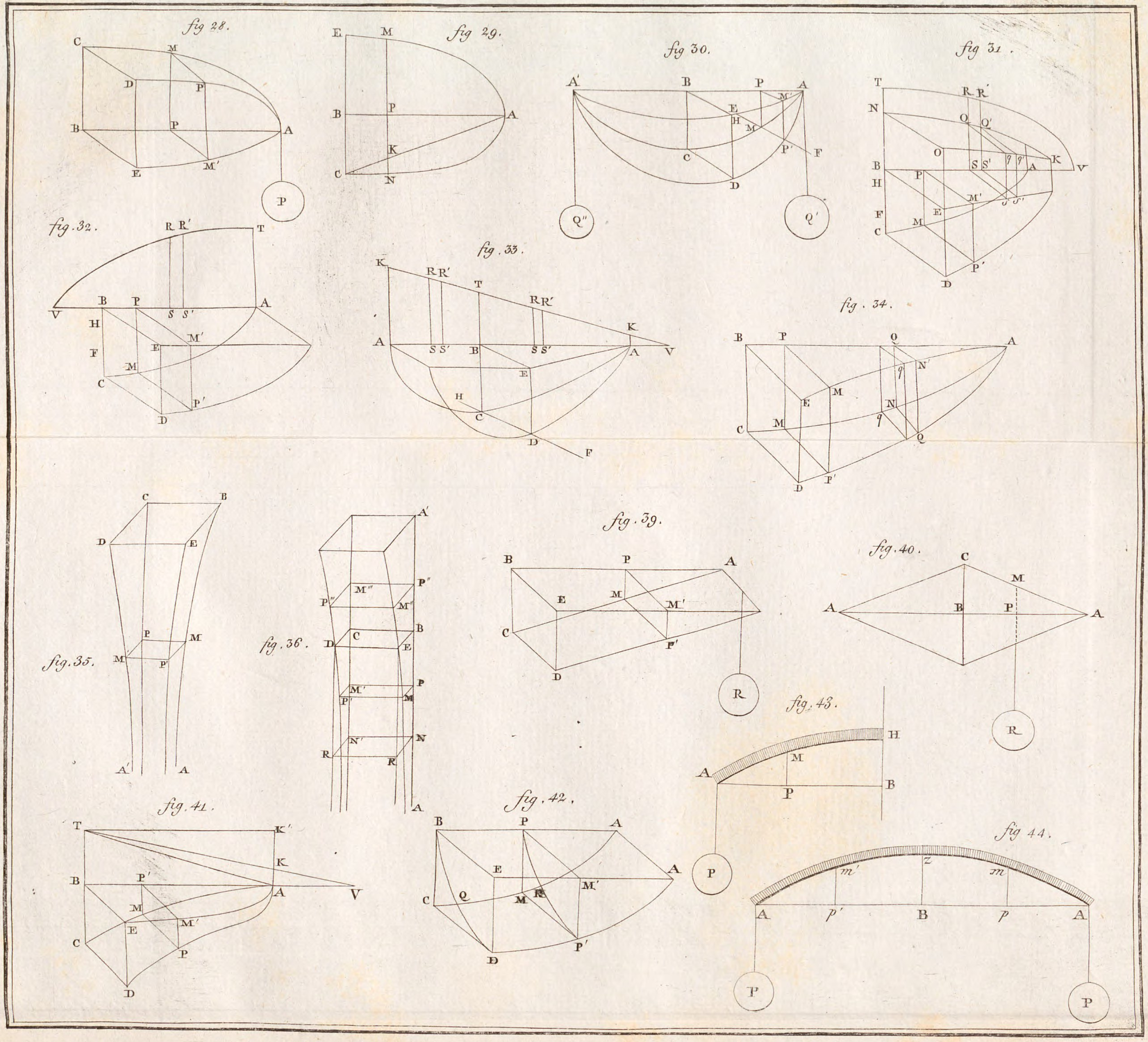


fig 28.
fig 29.
fig 30.
fig 31.
fig. 32.
fig. 33.
fig. 34.
fig. 35.
fig. 36.
fig. 39.
fig. 40.
fig. 41.
fig. 42.
fig. 43.
fig 44.

fig. 45
Meter
fig. 46

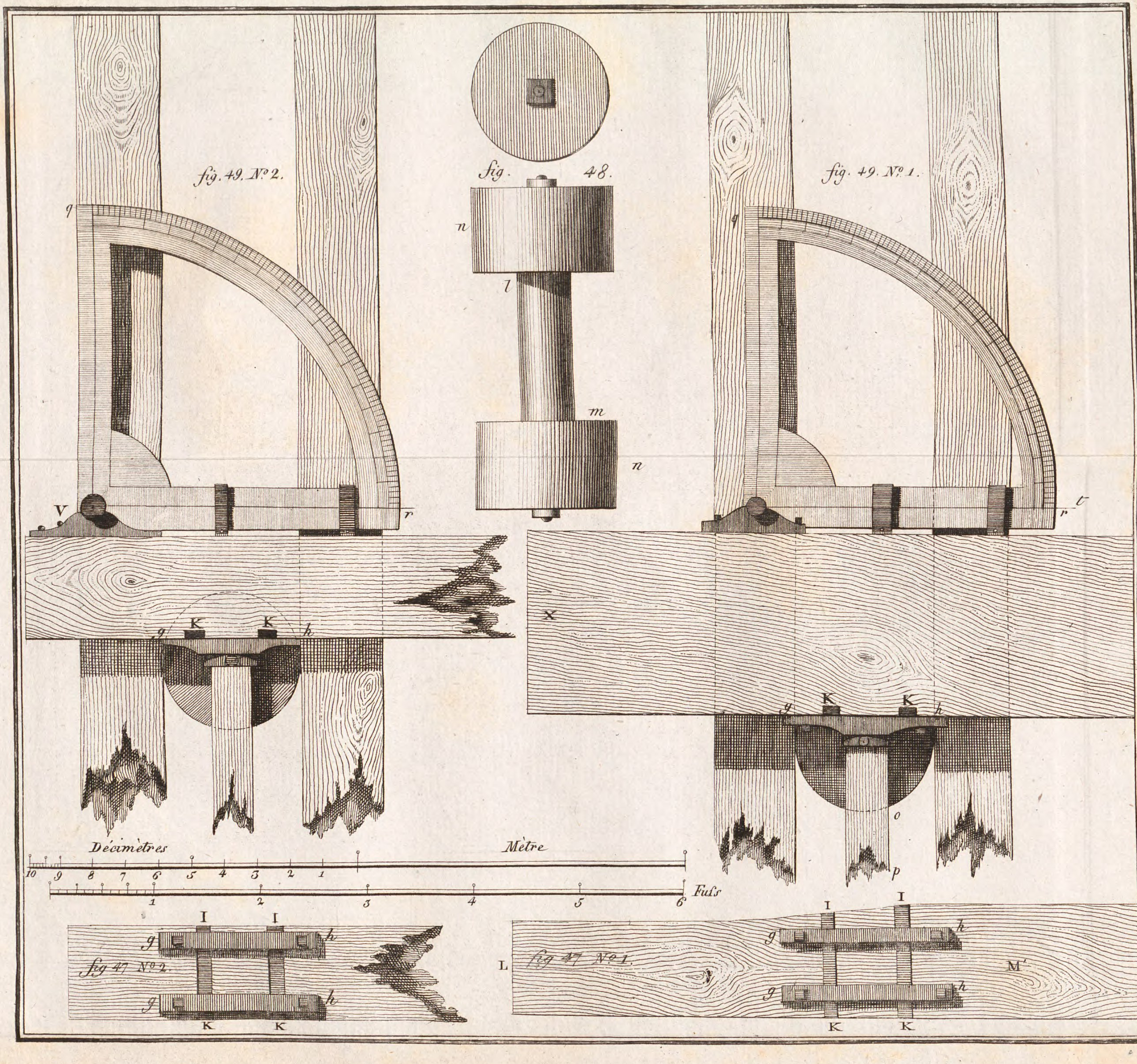
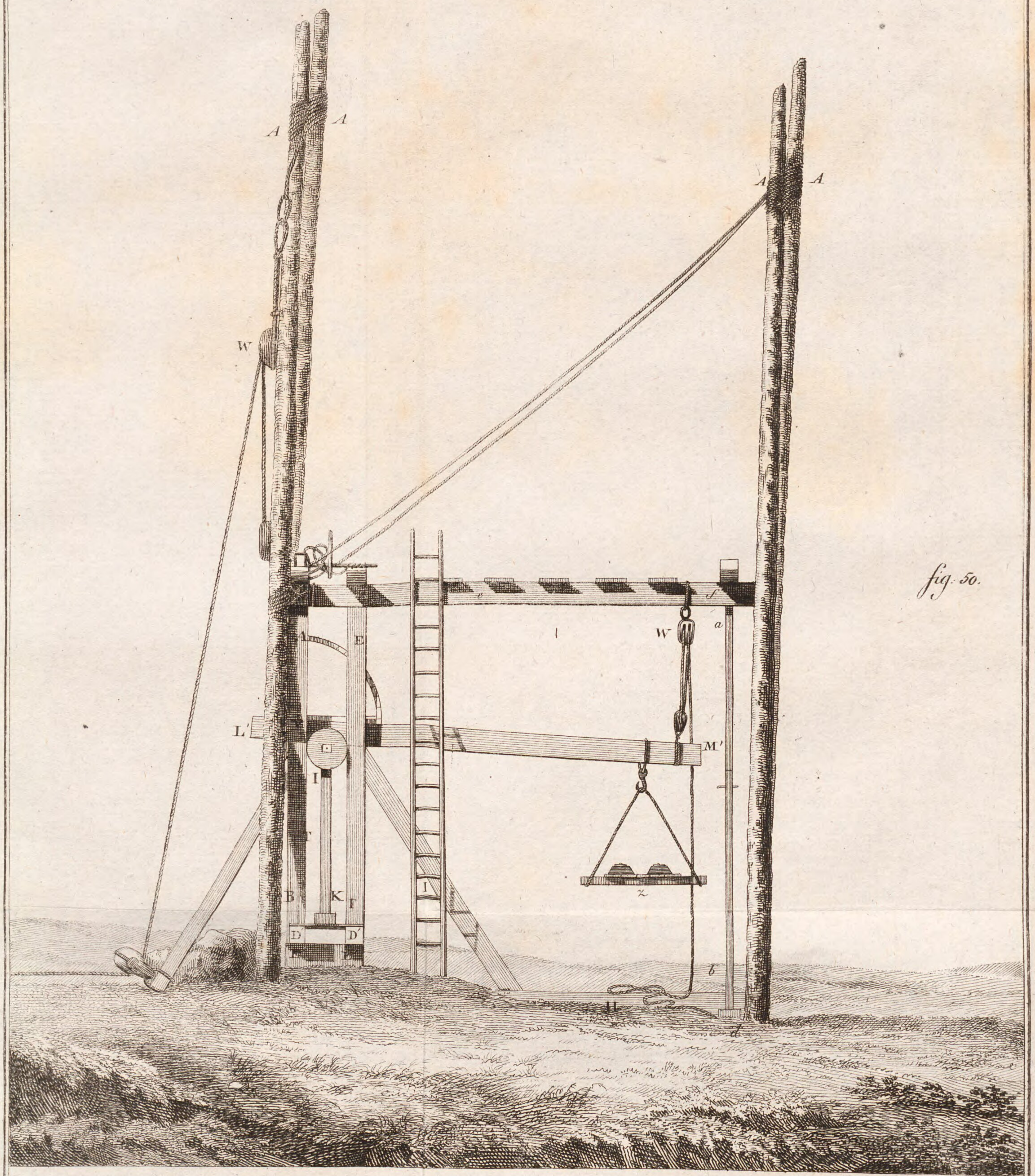
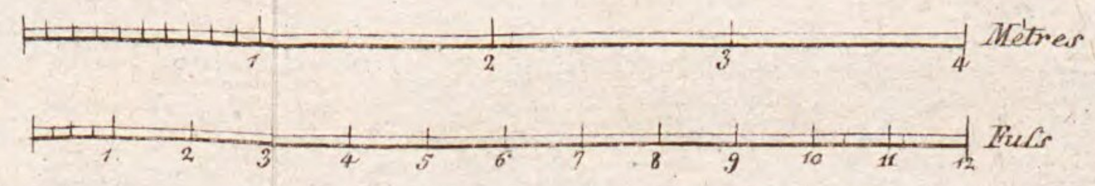


fig. 49. No 2.
fig 48.
fig. 49. No 1.
Décimètres
Mètre
Fuſs
fig 47 No 2.
fig 47 No 1.


A
A
A
A
W
W
L'
M'
E
I
K
B
D
D'
z
a
b
d
fig. 50.


1 2 3 4 Mètres
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Fuss

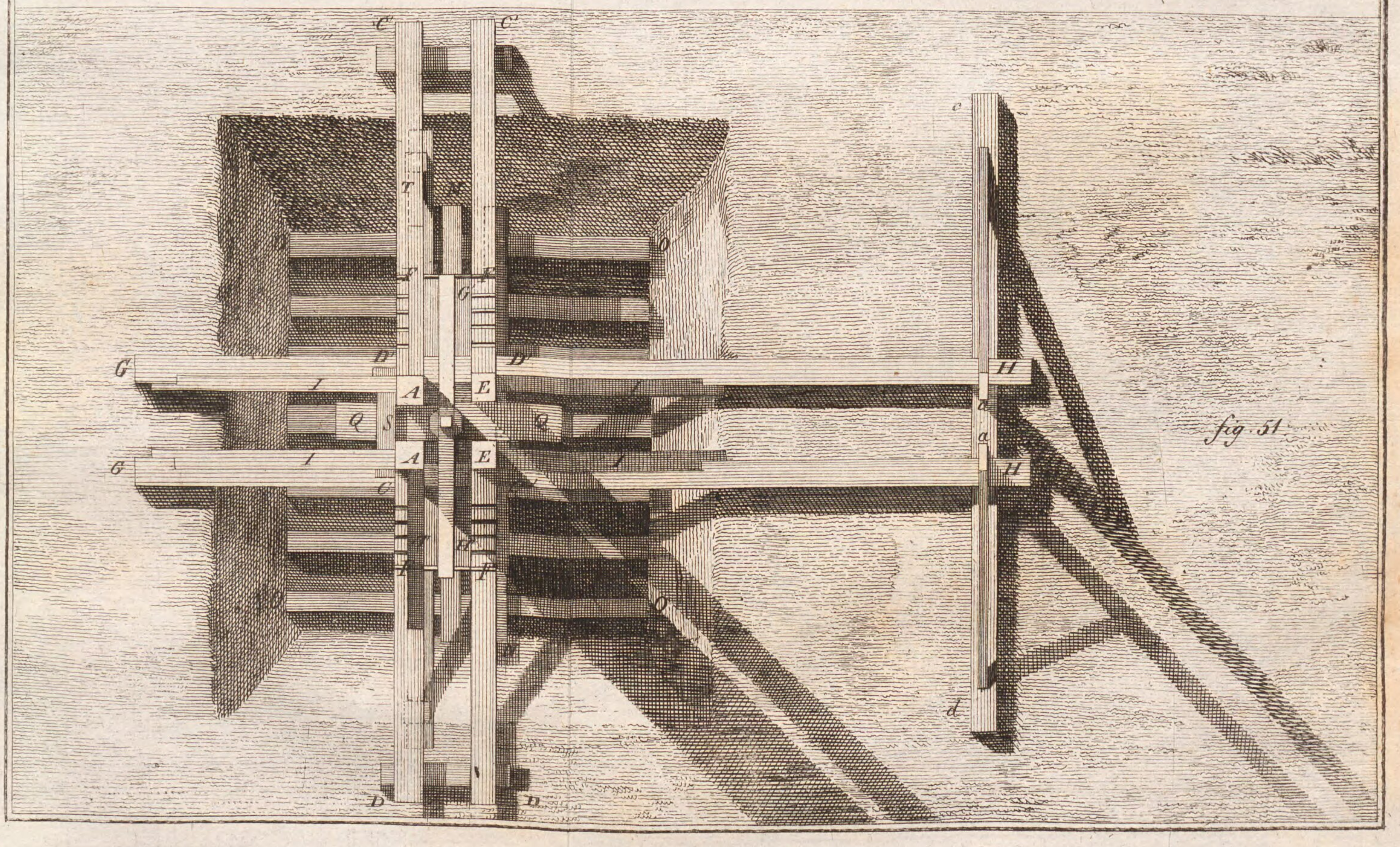

C
C
G
G
H
H
A
A
E
E
Q
Q
D
D
a
b
d
e
fig. 51.

*fig. 52*

*fig. 53*

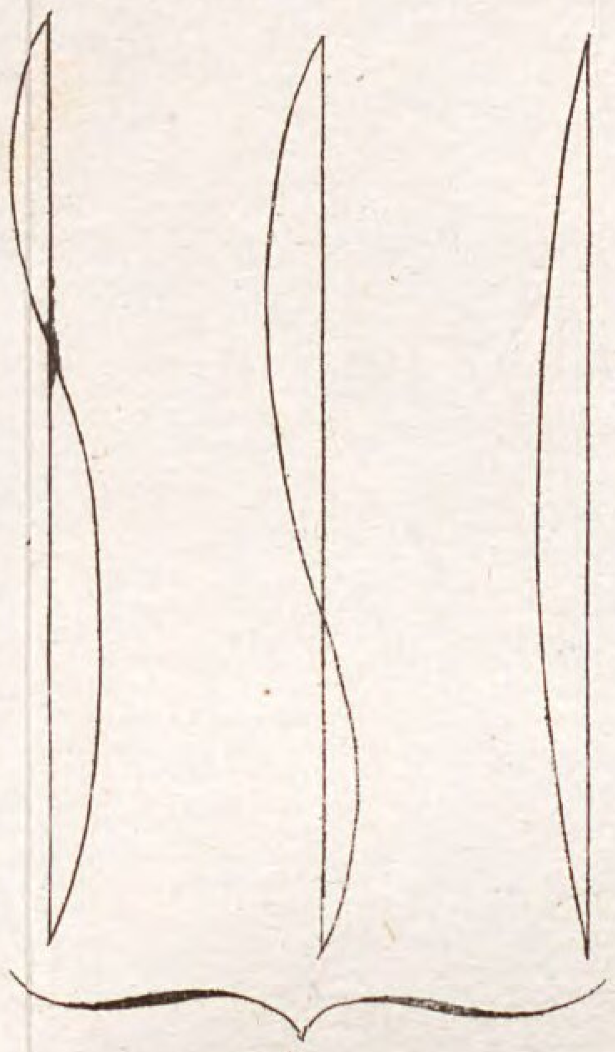


*fig. 54*

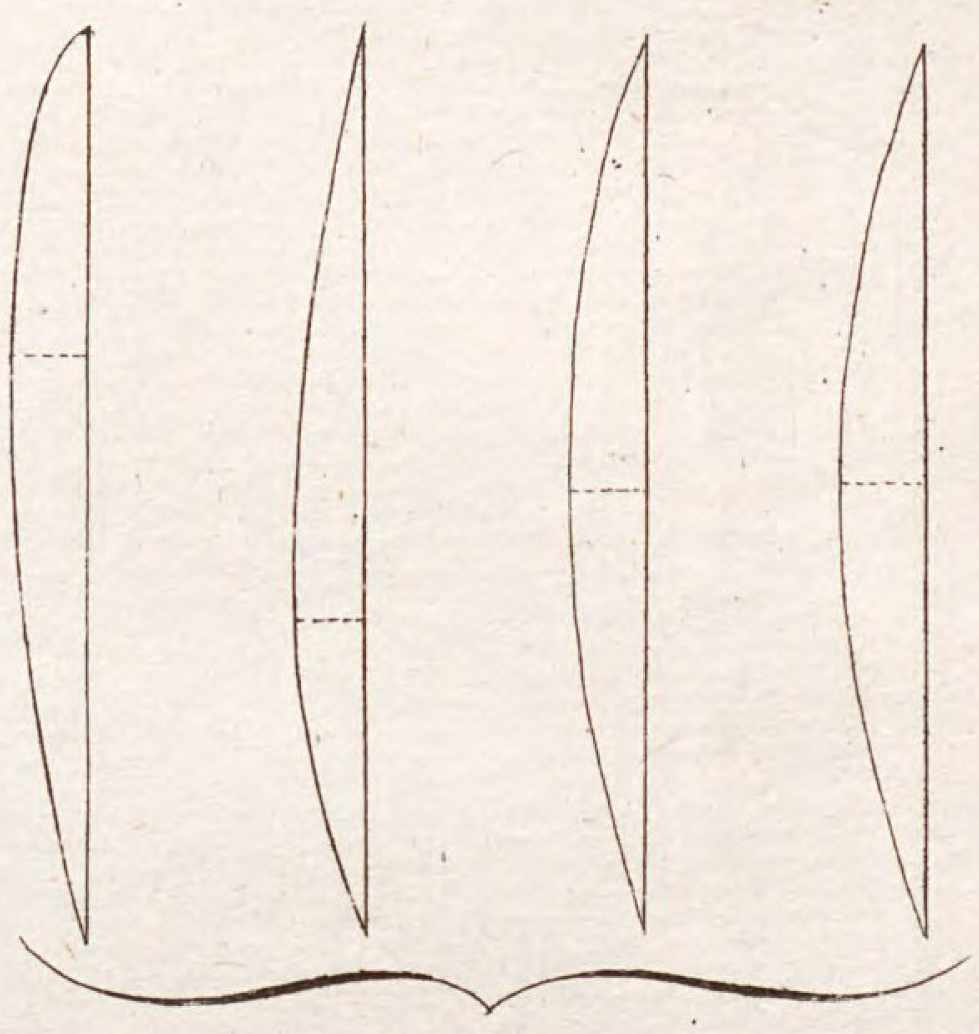


*fig. 55*

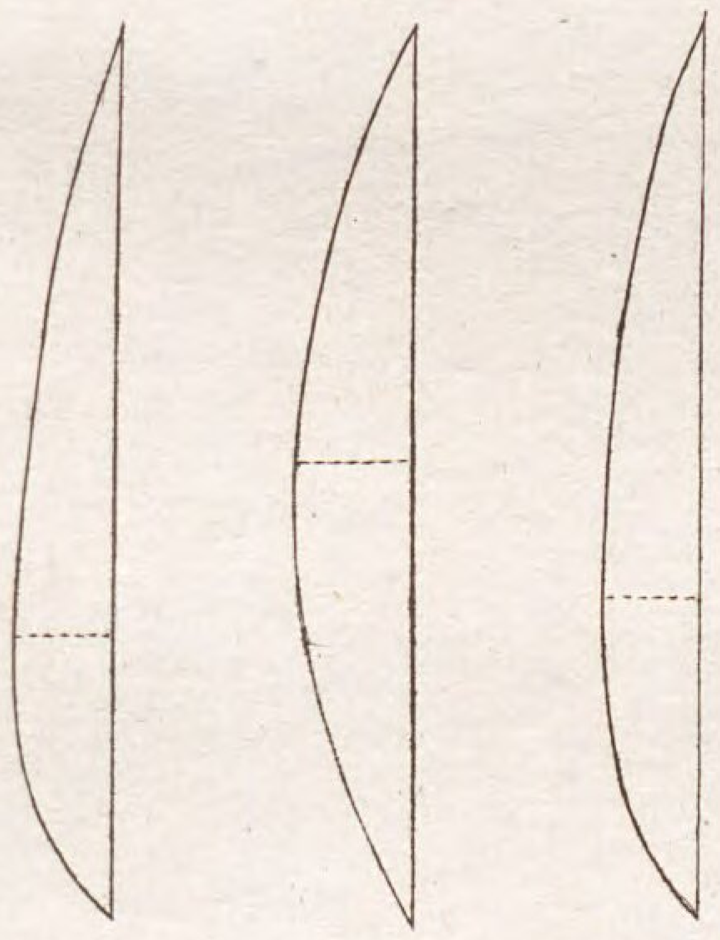


*fig. 56*

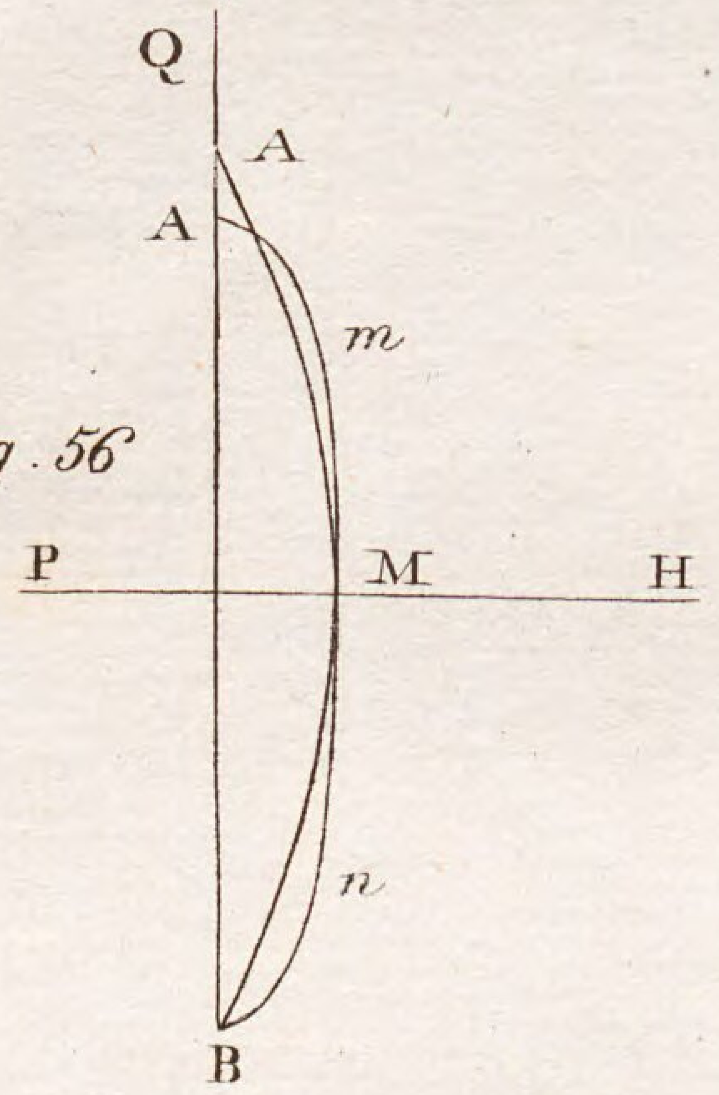



*fig. 57.*

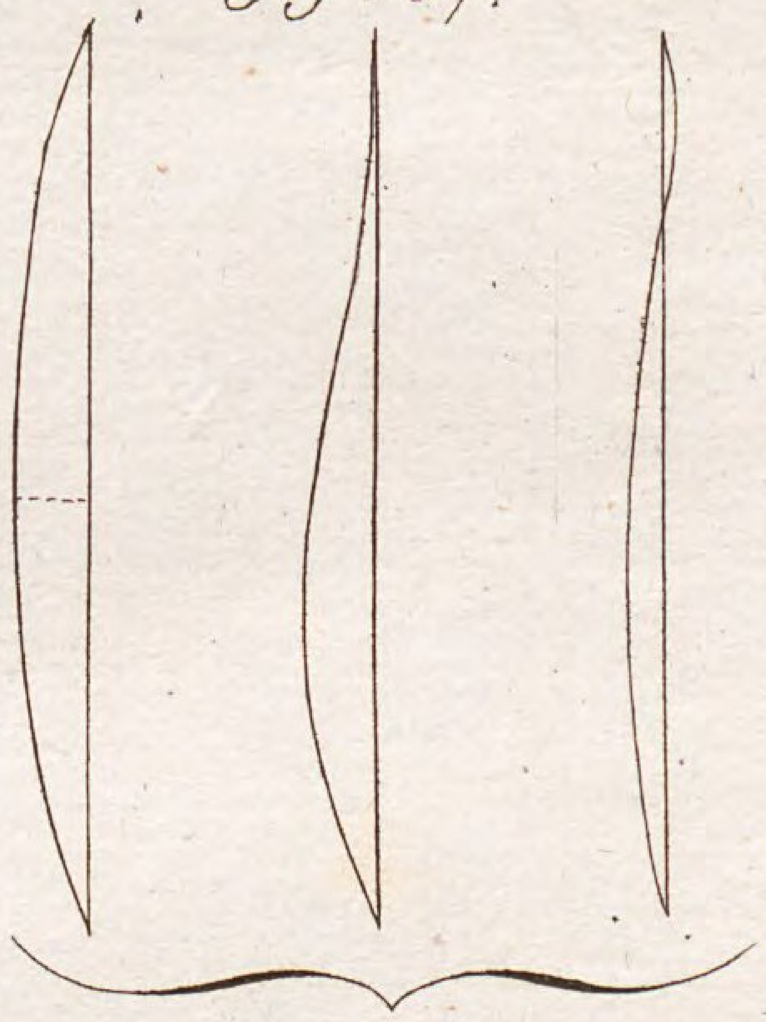


*fig 58*

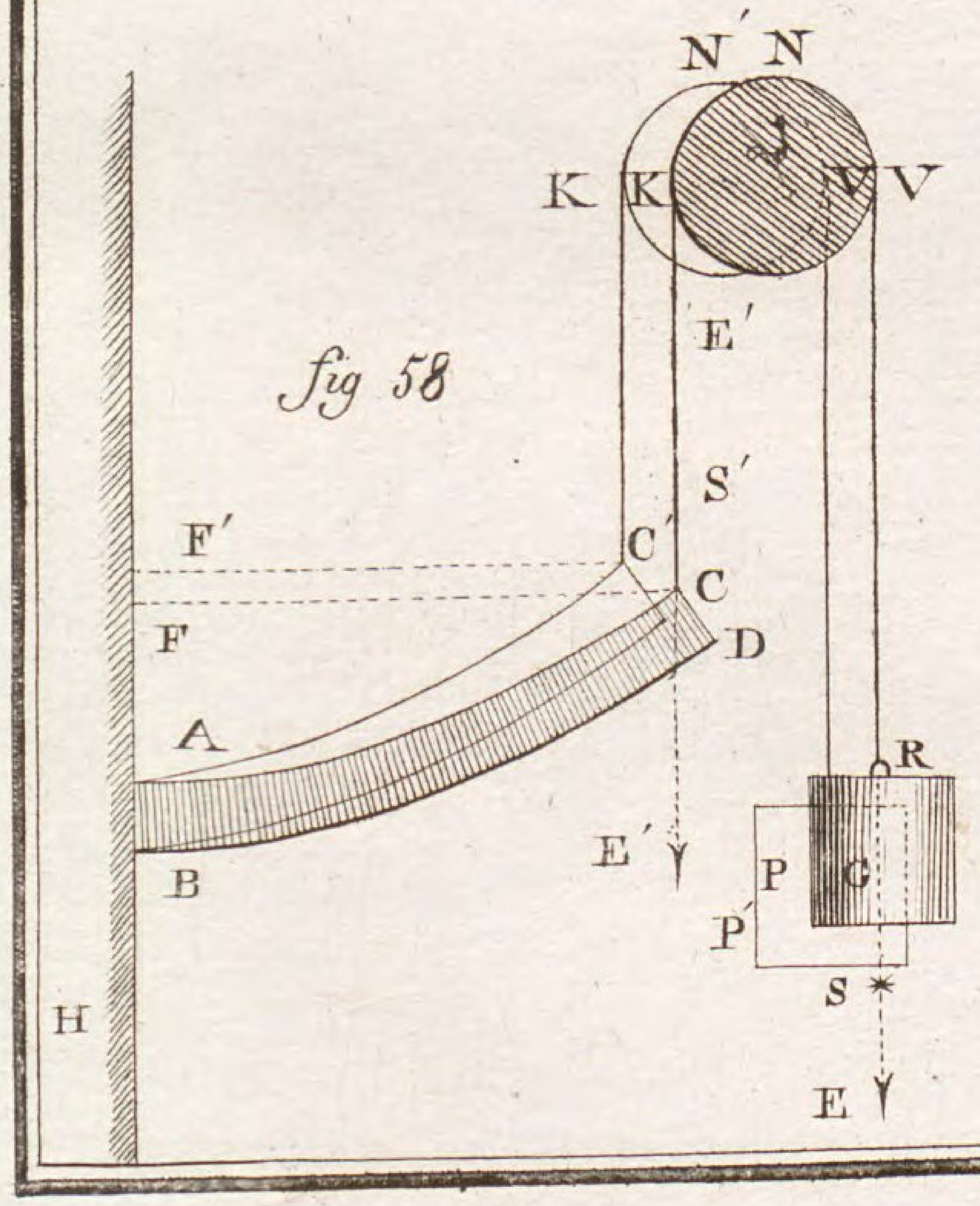



*fig 60.*

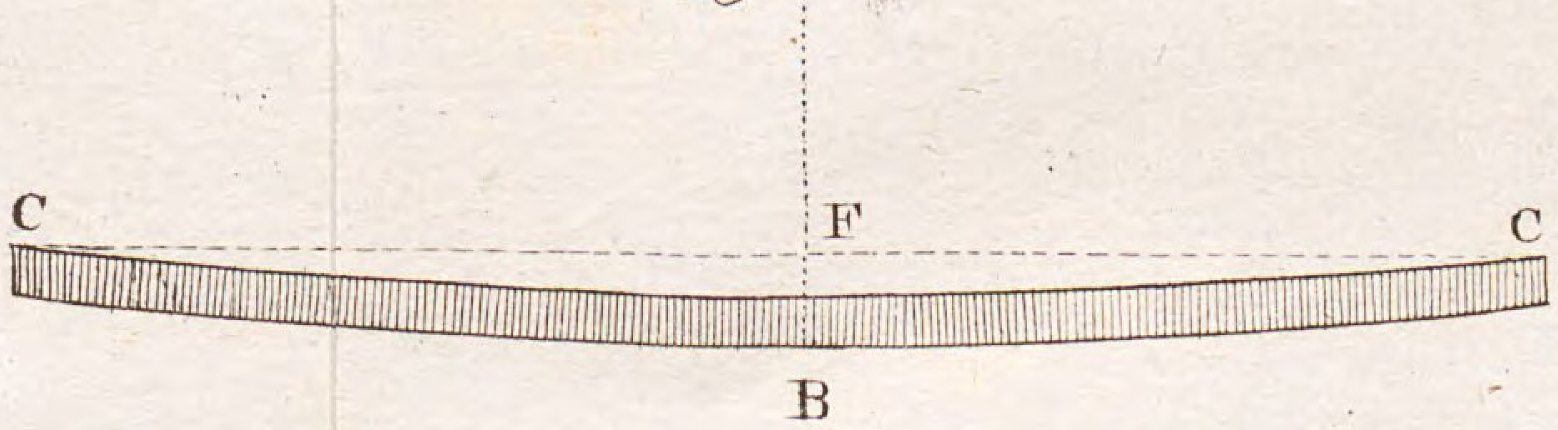
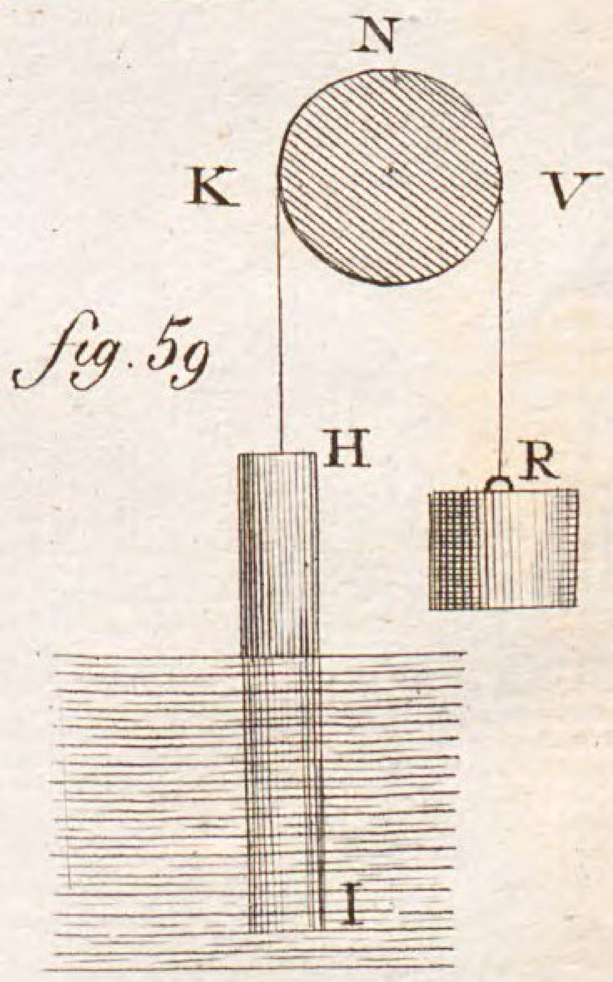
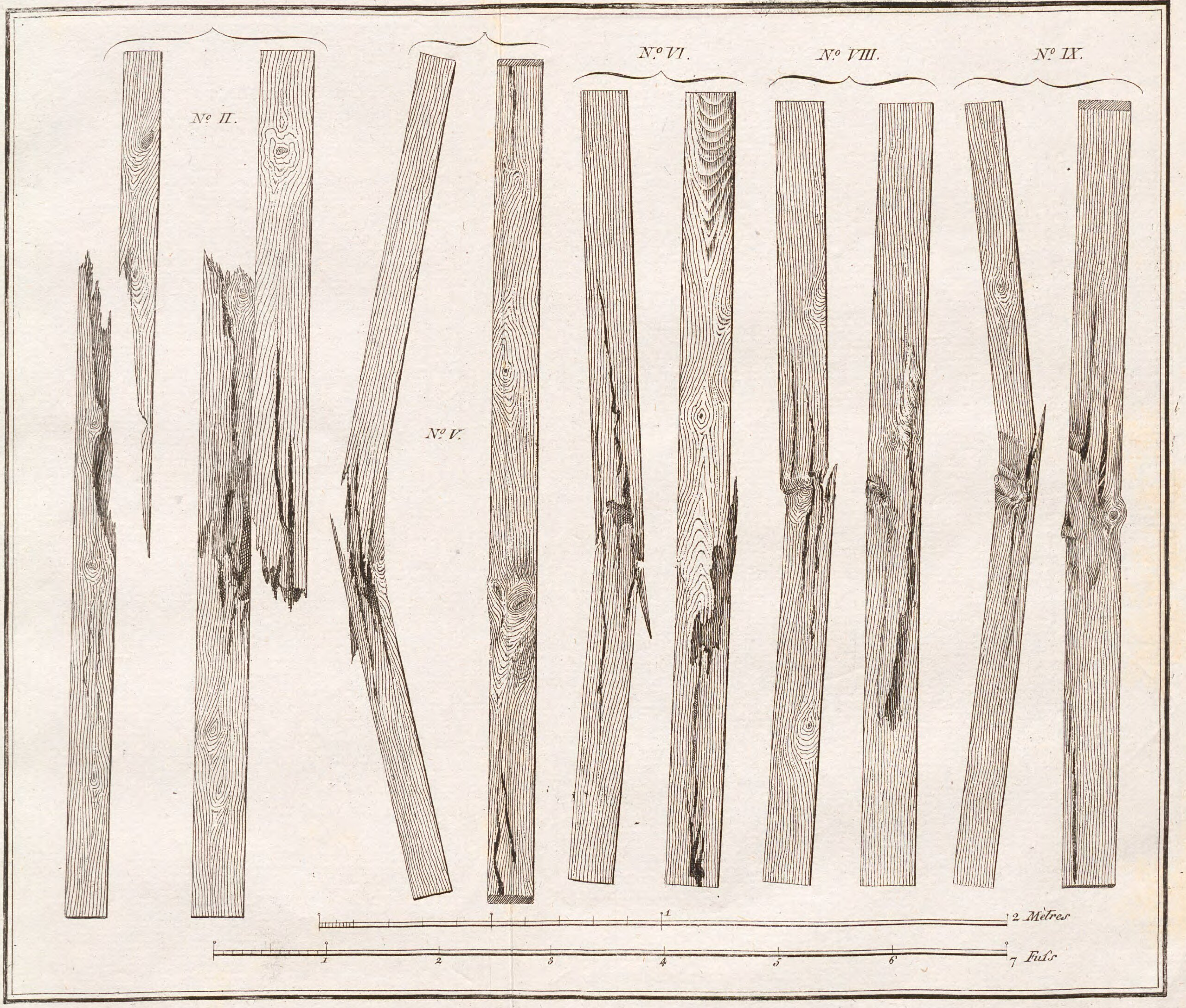
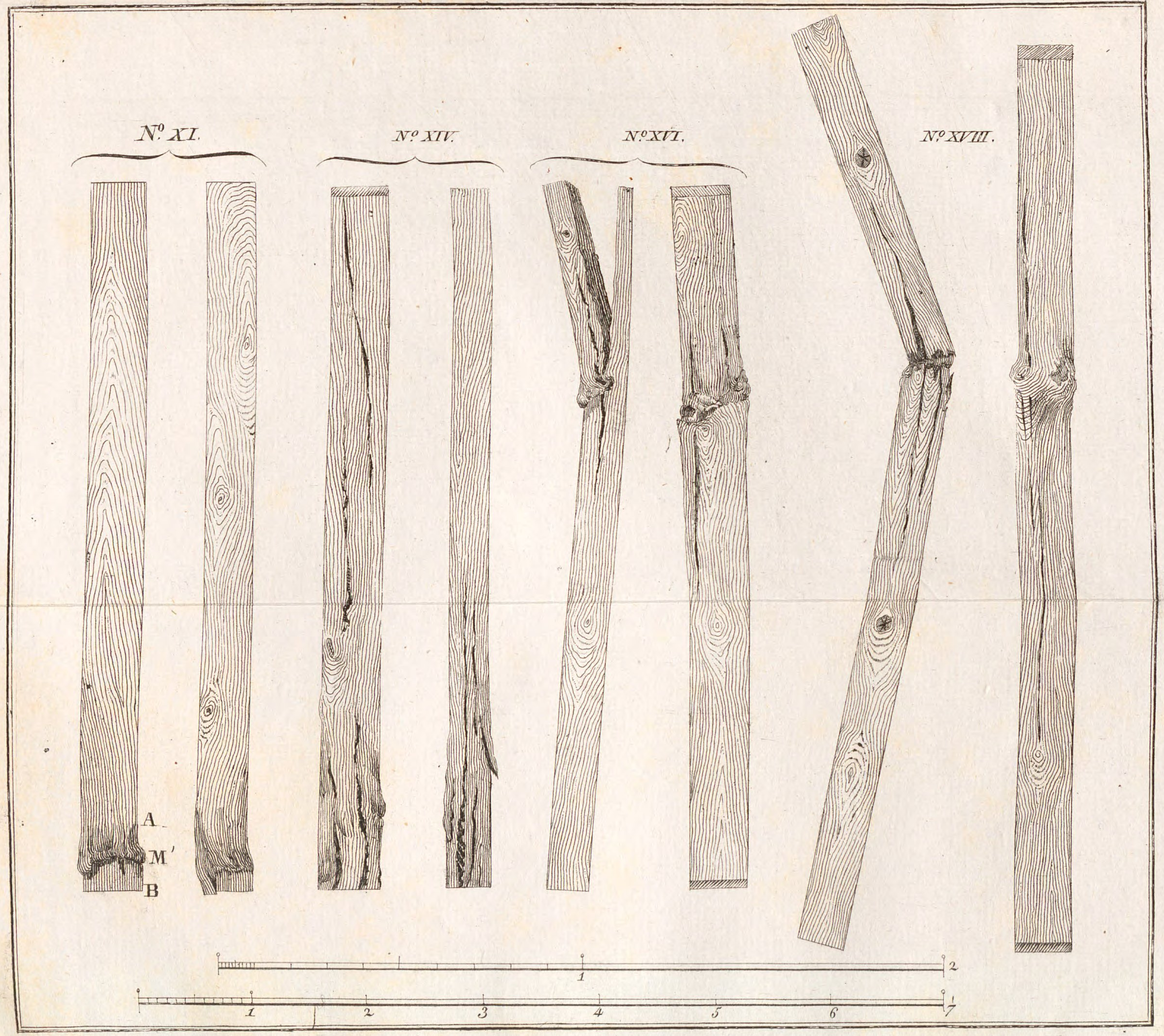



*fig. 59*




Nº II.
Nº V.
Nº VI.
Nº VIII.
Nº IX.
1
2 Mètres
1 2 3 4 5 6 7 Fuſs


N°. XI.
N° XIV.
N° XVI.
N° XVIII.
A
M'
B
1
2
1
2
3
4
5
6
7

9. L.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Girard, Pierre-Simon, / Kröncke, Claus, / Hoffmann, Carl Gottlob.

P. S. Girards Analytische Abhandlungen von dem Widerstande fester Körper und von den festen Körpern von überall gleichem Widerstande Nebst einer Menge Versuche über die Stärke und specifische Elasticität des Eichen- und Fichtenholzes

Giesen 1803

4 Math.a. 122
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10052872-2